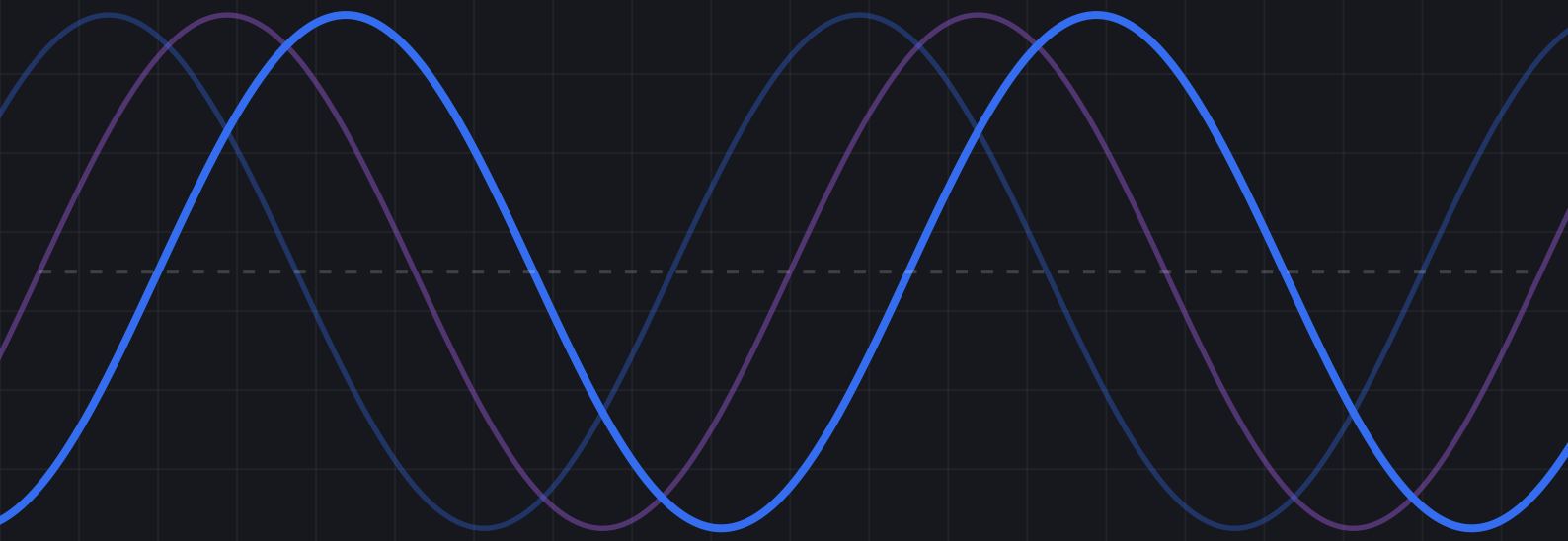
lysyuczymatmy.pl

ZESTAW TEMATYCZNY



GRANICE

CIĄGÓW I FUNKCJI

Wszystkie zadania z matur 2015–2026 · poziom rozszerzony

Dwa działy, od najłatwiejszego do najtrudniejszego · z kluczem

ZAWARTOŚĆ ZBIORU

15 ZADAŃ

R

Tomasz Saweczko · lysyuczymatmy.pl

© 2026 · wszelkie prawa zastrzeżone

TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim**, **Uniwersytecie Warszawskim** i **Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

Zobacz kurs

DODATKOWE MATERIAŁY

- Wszystkie materiały
- Autorskie arkusze próbne
- Krótkie filmy
- Dłuższe filmy

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

Dołącz

O tym zestawie

W tym pliku są **wszystkie zadania z granic ciągów i funkcji**, jakie pojawiły się na maturach rozszerzonych w latach 2015–2026 – razem **15**, ze wszystkich terminów. Treści pochodzą wprost z arkuszy CKE i nie są zmieniane; przy każdym zadaniu stoi jego sesja i numer w oryginalnym arkuszu. Plik ma **dwa rozdziały** – **Granice ciągów** (10 zadań) i **Granice funkcji** (5 zadań) – a w każdym z nich zadania idą **od najłatwiejszego do najtrudniejszego**. Na końcu jest **klucz**: wynik, wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania, czyli sam pomysł bez rachunków.

Skąd bierze się poziom trudności

Trudność jest liczbą wyprowadzoną z **poziomu wykonania** – średniego wyniku wszystkich zdających za dane zadanie, podanego w procentach maksymalnej liczby punktów:

$$\textbf{trudność} = (100 - \text{poziom wykonania}) : 20$$

Dla zadań z terminów głównych matur 2015–2026 trudność jest wyznaczona na podstawie statystyk poziomu wykonania CKE, dla pozostałych – szacowana.

Jak czytać oznaczenie trudności

Trudność stoi pod każdym zadaniem w skali **od 0 do 5** – pięć kółek zamalowywanych co pół:

Niski poziom trudności  **1/5**

Średni poziom trudności  **3/5**

Wysoki poziom trudności  **5/5**

Plakietka przy numerze zadania

Po lewej stronie nagłówka ramki stoi **źródło** – sesja i numer zadania w arkuszu CKE, po prawej **punktacja**. Między nimi może stanąć plakietka:

ZWZM **zadanie wycofane z matur** – tu **12**. Wraz z Formułą 2023 zniknęły zadania **zamknięte wielokrotnego wyboru** (odpowiedzi A–D) i **kodowane** (wynik wpisywany cyframi w kratki). Rozwiązywanie ich nadal ma sens: sprawdzają tę samą wiedzę, tylko w takiej formie już nie wystąpią.

1

Granice ciągów

10 ZADAŃ

Zadanie 1 MAJ 2015 · ZADANIE NR 6 ZWZM 2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1}-\frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4}\right).$$

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.



TRUDNOŚĆ 0,5/5

Zadanie 2 CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 2 ZWZM 1 PKT

Ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n=\frac{3n^2+7n-5}{11-5n+5n^2}$$

dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$. Granica tego ciągu jest równa

A. 3 **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $-\frac{5}{11}$

TRUDNOŚĆ 1/5

lysyuczymatmy.pl

Zadanie 3 MAJ 2017 · ZADANIE NR 2 ZWZM 1 PKT

Nieskończony ciąg liczbowy jest określony wzorem

$$a_n = \frac{(n^2 - 10n)(2 - 3n)}{2n^3 + n^2 + 3}$$

dla $n \geq 1$. Wtedy

A. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ **B.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

C. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ **D.** $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{3}{2}$

TRUDNOŚĆ 1/5

Zadanie 4 CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 5 ZWZM 1 PKT

Granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-7n^3 + 3n}{1 + 2n + 3n^2 + 4n^5}$$

jest równa

A. 0 **B.** $-\frac{7}{4}$ **C.** $-\frac{1}{7}$ **D.** $+\infty$

TRUDNOŚĆ 1/5

Zadanie 5 MAJ 2016 · ZADANIE NR 5 ZWZM 1 PKT

Granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(pn^2 + 4n)^3}{5n^6 - 4} = -\frac{8}{5}$$

Wynika stąd, że

A. $p = -8$ **B.** $p = 4$ **C.** $p = 2$ **D.** $p = -2$

TRUDNOŚĆ 1,5/5

Zadanie 6 MAJ 2019 · ZADANIE NR 5 ZWZM 2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1}-\frac{n^2}{3n^2+1}\right).$$

Wpisz w poniższe kratki - od lewej do prawej - trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

TRUDNOŚĆ **1,5/5**

Zadanie 7 MAJ 2021 · ZADANIE NR 5 ZWZM 2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2-(1-2n)^2}{(2n-1)^2}.$$

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

TRUDNOŚĆ **1,5/5**

lysyuczymatmy.pl

Zadanie 8 MAJ 2022 · ZADANIE NR 5 ZWZM 2 PKT

Ciąg (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem

$$a_n = \frac{(7p-1)n^3 + 5pn - 3}{(p+1)n^3 + n^2 + p},$$

gdzie p jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Oblicz wartość p, dla której granica ciągu (a_n) jest równa $\frac{4}{3}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

TRUDNOŚĆ **2,5/5**

Zadanie 9 MAJ 2026 · ZADANIE NR 1 2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ **3/5**

Zadanie 10 CZERWIEC 2021 · ZADANIE NR 2 ZWZM 1 PKT

Granice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2 + bn + 4}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{an^2 + bn + 4}$$

są równe. Stąd wynika, że

A. $a = 0$ i $b = 0$ **B.** $|a| = 1$ i $b = 0$ **C.** $|a| = 1$ i $|b| = 1$ **D.** $a = 0$ i $|b| = 1$

TRUDNOŚĆ **3,5/5**

2

Granice funkcji

5 ZADAŃ

Zadanie 11 LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 2 ZWZM 1 PKT

Granica

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+8}{x^2-4}-x\right)$$

jest równa

A. 8 B. $+\infty$ C. 0 D. -2

TRUDNOŚĆ 2,5/5

Zadanie 12 CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 2 ZWZM 1 PKT

Granica

$$\lim_{x\to-3}\frac{0{,}5x^2+3{,}5x+6}{-x^2+2x+15}$$

jest równa

A. $\left(-\frac{1}{8}\right)$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\left(-\frac{1}{16}\right)$ D. $\frac{7}{4}$

TRUDNOŚĆ 2,5/5

Zadanie 13 MAJ 2018 · ZADANIE NR 4 ZWZM 1 PKT

Granica

$$\lim_{x\to3^-}\frac{-x+2}{x^2-5x+6}$$

jest równa

A. $-\infty$ B. -1 C. 0 D. $+\infty$

TRUDNOŚĆ 3/5

lysyuczymatmy.pl

Zadanie 14 CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 2

2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9}.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ **3/5**

Zadanie 15 MAJ 2024 · ZADANIE NR 2

2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{(x-2)^2}.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ **3,5/5**

Odpowiedzi, wskazówki i szkice rozwiązań

Numer to numer zadania w tym zestawie. Do każdego zadania: wynik końcowy (przy dowodach pominięty), wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania – sam klucz, bez rachunków.

Granice ciągów

1 ODP. 1, 4, 3.

WSK. Policz granicę każdego z ułamków osobno. W pierwszym ułamku podziel licznik i mianownik przez n^3, a w drugim przez n^2.

SZKIC Granice ułamków to ilorazy współczynników przy najwyższych potęgach: $\frac{11}{6} - \frac{2}{5} = \frac{43}{30} = 1{,}43\ldots$

2 ODP. C.

WSK. Podziel licznik i mianownik ułamka przez n^2.

SZKIC Ilorazy współczynników przy n^2: $\frac{3}{5}$.

3 ODP. D.

WSK. Możesz wymnożyć licznik ułamka, a następnie podzielić licznik i mianownik przez n^3.

SZKIC Licznik zaczyna się od $-3n^3$, mianownik od $2n^3$: granica $-\frac{3}{2}$.

4 ODP. A.

WSK. Podziel licznik i mianownik ułamka przez n^5.

SZKIC Stopień licznika (3) jest mniejszy od stopnia mianownika (5) – granica to 0.

5 ODP. D.

WSK. Zauważ, że o ile $p \neq 0$, to powyższa granica wynosi $\frac{p^3}{5}$.

SZKIC Stopnie równe, więc granica to $\frac{p^3}{5} = -\frac{8}{5}$, czyli $p^3 = -8$, $p = -2$.

6 ODP. 952

WSK. Policz osobno granicę każdego z ułamków. W pierwszym podziel licznik i mianownik przez n^3, a w drugim przez n^2.

SZKIC $\frac{9}{7} - \frac{1}{3} = \frac{20}{21} = 0{,}952\ldots$

7 ODP. 125

WSK. Zacznij od przekształcenia licznika i mianownika używając **wzorów skróconego mnożenia**.

SZKIC Licznik to $5n^2 + 16n + 3$, mianownik $4n^2 - 4n + 1$; granica $\frac{5}{4} = 1{,}25$.

8 ODP. 411

WSK. Podziel licznik i mianownik ułamka przez n^3.

SZKIC Granica to $\frac{7p-1}{p+1} = \frac{4}{3}$, czyli $21p - 3 = 4p + 4$, $p = \frac{7}{17} = 0{,}411\ldots$

9 ODP. $\frac{1}{3}$.

WSK. Zamień $\binom{n+2}{n-1}$ na $\binom{n+2}{3}$ – licznik okaże się wielomianem trzeciego stopnia.

SZKIC $\binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$; iloraz współczynników przy n^3: $\frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

10 ODP. D.

WSK. Rozpatrz osobno przypadek, gdy $a = 0$ i $a \neq 0$.

SZKIC Dla $a \neq 0$ pierwsza granica jest niewła-

ściwa, a druga równa 0 – sprzeczność, więc $a = 0$. Wtedy granice to b i $\frac{1}{b}$, równe tylko dla $b^2 = 1$.

Granice funkcji

11 ODP. C.

WSK. Sprowadź wyrażenia do wspólnego mianownika, potem postępuj tak jak przy liczeniu granic ciągów tego typu (wyobraź sobie, że zamiast x jest n).

SZKIC $\frac{x^3+8-x(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{4x+8}{x^2-4} = \frac{4}{x-2} \to 0$.

12 ODP. B.

WSK. Zapisz licznik i mianownik ułamka, korzystając z **postaci iloczynowej funkcji kwadratowej**.

SZKIC Symbol $\left[\frac{0}{0}\right]$: $0{,}5x^2 + 3{,}5x + 6 = \frac{1}{2}(x + 3)(x + 4)$, $-x^2 + 2x + 15 = -(x + 3)(x - 5)$; po skróceniu $\frac{x+4}{-2(x-5)} \to \frac{1}{16}$.

13 ODP. D.

WSK. Zapisz mianownik w **postaci iloczynowej**. Zwróć uwagę, że skoro $x \to 3^-$, to $x < 3$.

SZKIC $\frac{-x+2}{(x-2)(x-3)}$: licznik dąży do -1, $x - 2 \to 1$, a $x - 3 \to 0^-$, więc iloraz to $\frac{-1}{0^-} = +\infty$.

14 ODP. $-\frac{1}{6}$.

WSK. Ponieważ $x \to 3^-$, to $x < 3$, a zatem wyrażenie $(x - 3)$ jest **ujemne**. Zatem z definicji wartości bezwzględnej dostajemy, że $|x - 3| = -(x - 3)$.

SZKIC Dla $x < 3$: $\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{x+3} \to -\frac{1}{6}$.

15 ODP. $-\infty$.

WSK. Przekształć wyrażenie $x^3 - 8$, korzystając ze **wzoru na różnicę sześcianów**.

SZKIC $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^2} = \frac{x^2+2x+4}{x-2}$; licznik dąży do 12, mianownik do 0^-, więc granica to $-\infty$.