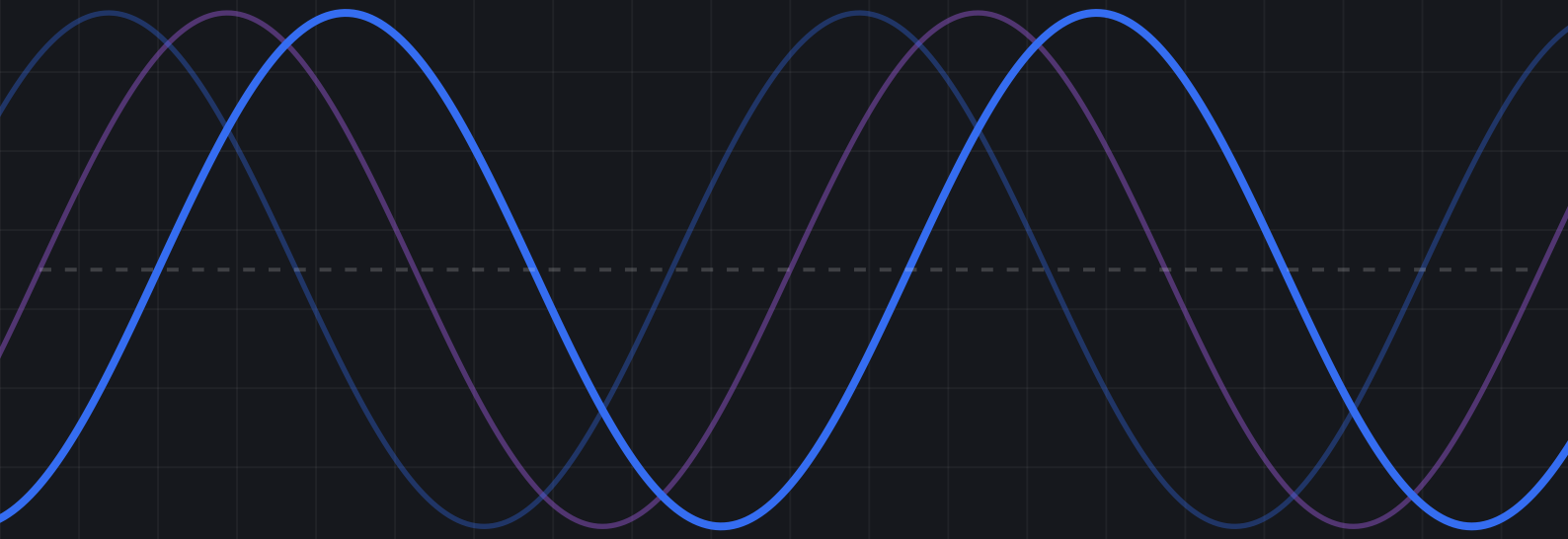
lysyuczymatmy.pl

ZESTAW TEMATYCZNY



CIĄGI

I SZEREG GEOMETRYCZNY

Wszystkie zadania z matur 2015–2026 · poziom rozszerzony

Od najłatwiejszego do najtrudniejszego · z kluczem

ZAWARTOŚĆ ZBIORU

27 ZADAŃ

R

Tomasz Saweczko · lysyuczymatmy.pl

© 2026 · wszelkie prawa zastrzeżone

TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim**, **Uniwersytecie Warszawskim** i **Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

Zobacz kurs

DODATKOWE MATERIAŁY

- Wszystkie materiały
- Autorskie arkusze próbne
- Krótkie filmy
- Dłuższe filmy

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

Dołącz

O tym zestawie

W tym pliku są **wszystkie zadania z ciągów i szeregu geometrycznego**, jakie pojawiły się na maturach rozszerzonych w latach 2015–2026 – razem **27**, ze wszystkich terminów. Zadań o granicach ciągów tu nie ma. Treści pochodzą wprost z arkuszy CKE i nie są zmieniane; przy każdym zadaniu stoi jego sesja i numer w oryginalnym arkuszu. Zadania idą **od najłatwiejszego do najtrudniejszego**, a na końcu jest **klucz**: wynik, wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania, czyli sam pomysł bez rachunków.

Skąd bierze się poziom trudności

Trudność jest liczbą wyprowadzoną z **poziomu wykonania** – średniego wyniku wszystkich zdających za dane zadanie, podanego w procentach maksymalnej liczby punktów:

$$\textbf{trudność} = (100 - \text{poziom wykonania}) : 20$$

Dla zadań z terminów głównych matur 2015–2026 trudność jest wyznaczona na podstawie statystyk poziomu wykonania CKE, dla pozostałych – szacowana.

Jak czytać oznaczenie trudności

Trudność stoi pod każdym zadaniem w skali **od 0 do 5** – pięć kółek zamalowywanych co pół:

Niski poziom trudności  **1/5**

Średni poziom trudności  **3/5**

Wysoki poziom trudności  **5/5**

Plakietka przy numerze zadania

Po lewej stronie nagłówka ramki stoi **źródło** – sesja i numer zadania w arkuszu CKE, po prawej **punktacja**. Między nimi może stanąć plakietka:

ZWZM **zadanie wycofane z matur** – tu **5**. Wraz z Formułą 2023 zniknęły zadania **zamknięte wielokrotnego wyboru** (odpowiedzi A–D) i **kodowane** (wynik wpisywany cyframi w kratki). Rozwiązywanie ich nadal ma sens: sprawdzają tę samą wiedzę, tylko w takiej formie już nie wystąpią.

Zadania

Zadanie 1

CZERWIEC 2015 · ZADANIE NR 1 · ZWZM · 1 PKT

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_{n+1} = a_n + n - 6$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $a_3 = -1$. Wyraz a_2 jest równy

A. -3 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 3

TRUDNOŚĆ 1,5/5

Zadanie 2

CZERWIEC 2019 · ZADANIE NR 4 · ZWZM · 1 PKT

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony w następujący sposób:

$$a_1 = \frac{3}{5} \quad \text{oraz} \quad a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_n$$

dla $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

A. $\frac{5}{3}$ **B.** $\frac{10}{9}$ **C.** $\frac{9}{10}$ **D.** $\frac{9}{5}$

TRUDNOŚĆ 1,5/5

Zadanie 3

MAJ 2017 · ZADANIE NR 14 · 6 PKT

Liczby a, b, c są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny.

Wyznacz liczby a, b, c.

TRUDNOŚĆ 2/5

Zadanie 4

MAJ 2026 · ZADANIE NR 6 · 4 PKT

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o skończonej liczbie wyrazów. Liczba wyrazów tego ciągu jest większa od 6. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 1, a ostatni wyraz tego ciągu jest równy (-2025). Drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 2/5

lysyuczymatmy.pl

Zadanie 5 MAJ 2018 · ZADANIE NR 13 — 4 PKT

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168. \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32 769.

TRUDNOŚĆ **2,5/5**

Zadanie 6 MAJ 2025 · ZADANIE NR 6 — 4 PKT

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest geometryczny i zbieżny. W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ **2,5/5**

Zadanie 7 CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 5 · ZWZM — 1 PKT

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{4}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{3}{7}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** 7

TRUDNOŚĆ **3/5**

Zadanie 8 LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 6 — 3 PKT

Pierwszy wyraz ciągu (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 2. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$.

Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3$.

TRUDNOŚĆ **3/5**

lysyuczymatmy.pl

Zadanie 9 CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 10 3 PKT

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$.

Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

TRUDNOŚĆ 3/5

Zadanie 10 MAJ 2024 · ZADANIE NR 7 4 PKT

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x, y oraz z są odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oblicz x, y oraz z. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5

Zadanie 11 CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 6 ZWZM 2 PKT

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym iloraz jest równy pierwszemu wyrazowi, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 12. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

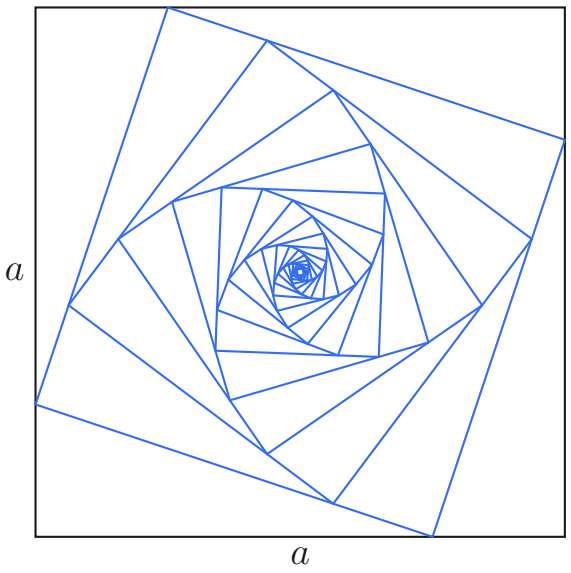
TRUDNOŚĆ 3/5

Zadanie 12 MAJ 2023 · ZADANIE NR 10 4 PKT

Określamy kwadraty $K_1, K_2, K_3, \ldots$ następująco:

- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$, K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny. Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5

lysyuczymatmy.pl

Zadanie 13 LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 5 ZWZM 2 PKT

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3.

Oblicz iloraz ciągu (a_n).

W kratki poniżej wpisz kolejno od lewej do prawej cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych otrzymanego wyniku.



TRUDNOŚĆ 3,5/5

Zadanie 14 CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 11 5 PKT

Ciąg (a, b, c) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Ciąg $(2a, 2b, c + 1)$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym. Ponadto spełniony jest warunek $c - b = 6$.

Oblicz a, b oraz c. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3,5/5

Zadanie 15 CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 10 5 PKT

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}.$$

Wyrazy a_1, a_2, a_3 są odpowiednio czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego.

Oblicz a_1.

TRUDNOŚĆ 3,5/5

Zadanie 16 MAJ 2019 · ZADANIE NR 12 — 6 PKT

Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$$

jest geometryczny.

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

TRUDNOŚĆ **3,5/5**

Zadanie 17 MAJ 2016 · ZADANIE NR 7 — 2 PKT

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$$

dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie.

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny.

TRUDNOŚĆ **3,5/5**

Zadanie 18 MAJ 2022 · ZADANIE NR 10 — 4 PKT

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Ponadto $a_1 = 675$ i $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$. Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (b_n). Ponadto $a_3 = b_4$.

Oblicz b_1.

TRUDNOŚĆ **3,5/5**

Zadanie 19 CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 7 4 PKT

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych jest równa 16, tj.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = 16.$$

Ponadto

$$a_1 + a_3 = \frac{5}{2} \cdot a_2.$$

Wyznacz wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ **3,5/5**

Zadanie 20 CZERWIEC 2025 · ZADANIE NR 9 5 PKT

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny i rosnący. W tym ciągu $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$. Ciąg (b_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i $b_1 = a_{11}$ oraz $b_2 = a_6$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n). Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ **4/5**

Zadanie 21 CZERWIEC 2026 · ZADANIE NR 7 4 PKT

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 14. Suma sześcianów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 392.

Wyznacz wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ **4/5**

Zadanie 22 CZERWIEC 2026 · ZADANIE NR 8 4 PKT

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny. Jeżeli w tym ciągu pomniejszymy trzeci wyraz o 4, a pozostałe wyrazy pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugi i trzeci wyraz tak otrzymanego ciągu arytmetycznego pomniejszymy o 1, to otrzymamy nowy ciąg geometryczny.

Oblicz x, y oraz z. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ **4/5**

Zadanie 23 CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 10 — 4 PKT

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, którego iloraz q jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek $|q| < 1$. Stosunek sumy S_N wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy S_P wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy różnicy tych sum, tj.

$$\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P.$$

Oblicz q.

TRUDNOŚĆ 4/5

Zadanie 24 CZERWIEC 2018 · ZADANIE NR 10 — 4 PKT

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2), którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny.

Oblicz wyraz aq tego ciągu.

TRUDNOŚĆ 4/5

Zadanie 25 CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 7 — 4 PKT

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} - \frac{54x}{(x-1)^3} + \ldots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4/5

lysyuczymatmy.pl

Zadanie 26 CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 10 5 PKT

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18.

Wyznacz te ciągi.

TRUDNOŚĆ **4/5**

Zadanie 27 CZERWIEC 2018 · ZADANIE NR 11 4 PKT

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach

$$x^2 + y^2 = 2^{11-n},$$

$n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k}.

Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k, gdzie $k \geq 1$.

TRUDNOŚĆ **4/5**

lysyuczymatmy.pl

Odpowiedzi, wskazówki i szkice rozwiązań

Numer to numer zadania w tym zestawie. Do każdego zadania: wynik końcowy (przy dowodach pominięty), wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania – sam klucz, bez rachunków.

1 ODP. D

WSK. Zacznij od wstawienia do wzoru rekurencyjnego $n = 2$.

SZKIC Dla $n = 2$: $a_3 = a_2 + 2 - 6$, więc $a_2 = a_3 + 4 = 3$.

2 ODP. D.

WSK. Z definicji ciągu wyznacz jego iloraz i skorzystaj ze **wzoru na sumę wyrazów szeregu geometrycznego**.

SZKIC $q = \frac{2}{3}$, więc $S = \frac{3/5}{1-2/3} = \frac{9}{5}$.

3 ODP. $(a, b, c) = (5, 9, 13)$ lub $(a, b, c) = \left(\frac{31}{2}, 9, \frac{5}{2}\right)$.

WSK. Najwygodniejszym podejściem do tego zadania będzie przyjęcie, że $(a, b, c) = (a - r, b, b + r)$.

SZKIC $b = 9$, $a = 9 - r$, $c = 9 + r$. Warunek geometryczności $(7 - r, 9, 19 + 2r)$: $81 = (7 - r)(19 + 2r)$, czyli $2r^2 + 5r - 52 = 0$, $r = 4$ lub $r = -\frac{13}{2}$.

4 ODP. $-1\,026\,168$.

WSK. Warunek geometryczności wyrazów a_2, a_3, a_6 daje równanie na różnicę r; liczbę wyrazów odczytasz ze wzoru na ostatni wyraz.

SZKIC $(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$ daje $r = -2$ ($r = 0$ odpada). Z $-2025 = 1 - 2(n - 1)$: $n = 1014$, więc $S = \frac{1-2025}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$.

5 ODP. $n = 15$.

WSK. Zapisz wyrazy ciągu (a_n) w układzie równań w zależności od a_1 i q, następnie podziel równania stronami (uważaj na założenia).

SZKIC Dzieląc równania stronami: $q = -2$; wtedy $a_1 \cdot 4 \cdot (1 - 8) = -84$, $a_1 = 3$. $S_n = 1 - (-2)^n = 32\,769$, czyli $(-2)^n = -2^{15}$, $n = 15$.

6 ODP. $S = 27$ lub $S = \frac{27}{2}$.

WSK. Rozwiąż podany układ równań, aby wyznaczyć wartości a_1 oraz a_3. Następnie skorzystaj ze wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego, aby obliczyć możliwe wartości ilorazu q. Pamiętaj, że warunkiem zbieżności szeregu geometrycznego jest nierówność $|q| < 1$.

SZKIC Układ daje $a_1^2 - 20a_1 + 36 = 0$: $\{a_1, a_3\} = \{2, 18\}$. $q^2 = \frac{a_3}{a_1}$ musi być mniejsze od 1, więc $a_1 = 18$, $q = \pm\frac{1}{3}$ i $S = \frac{18}{1\mp1/3}$: 27 lub $\frac{27}{2}$.

7 ODP. B.

WSK. Przyjmij $q = 3a_1$ i skorzystaj ze wzoru ze wzoru na **sumę szeregu geometrycznego**.

SZKIC $q = 3a_1$: $\frac{a_1}{1-3a_1} = \frac{1}{4} \iff 7a_1 = 1$.

8 ODP. $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{10}{9}$.

WSK. Wstaw kolejno do wzoru rekurencyjnego

$n = 1, 2, 3$.

SZKIC $n = 1$: $a_2 = \frac{1}{3}$; $n = 2$: $a_3 = \frac{1/3-4}{3} = -\frac{11}{9}$. Suma $2 + \frac{1}{3} - \frac{11}{9} = \frac{10}{9}$.

9 ODP. $a_1 = 10$. Ciąg nie jest malejący.

WSK. Aby znaleźć wyraz pierwszy, musimy cofnąć się do niego od wyrazu czwartego. Dlatego zacznij od wstawienia do wzoru rekurencyjnego $n = 3$.

SZKIC Cofając od $a_4 = 4$: $a_3 = 5$, $a_2 = 7$, $a_1 = 10$. Różnica $a_{n+1} - a_n = n - 4$ jest dodatnia od $n = 5$, więc ciąg nie jest malejący.

10 ODP. $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

WSK. Wykorzystaj fakt, że dla ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r mamy: $a_n = a_1 + (n-1)r$. Następnie wyraź x, y i z w zależności od r (korzystając również z tego, że $x + y + z = 105$).

SZKIC $x = a_1$, $y = a_1 + r$, $z = a_1 + 5r$; z $(a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 5r)$ jest $r = 3a_1$, więc trójka to $(a_1, 4a_1, 16a_1)$ i $21a_1 = 105$.

11 ODP. 923

WSK. Przyjmij $q = a_1$ i wykorzystaj **wzór na sumę wyrazów szeregu geometrycznego**.

SZKIC $q = a_1$, więc $\frac{a_1}{1-a_1} = 12$, $a_1 = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$ (i $|q| < 1$ się zgadza).

12 ODP. $S = \frac{8\left(4+\sqrt{10}\right)a}{3}$.

WSK. Wyznacz długość boku drugiego kwadratu, korzystając z **twierdzenia Pitagorasa**. Następnie oblicz iloraz ciągu geometrycznego utworzonego z obwodów kwadratów i skorzystaj ze **wzoru na sumę szeregu geometrycznego**: $S = \frac{a_1}{1-q}$.

SZKIC Bok K_2 to przeciwprostokątna o przyprostokątnych $\frac{a}{4}$ i $\frac{3a}{4}$: $\frac{a\sqrt{10}}{4}$, więc $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$ i $S = \frac{4a}{1-\sqrt{10}/4} = \frac{16a}{4-\sqrt{10}} = \frac{8(4+\sqrt{10})a}{3}$.

13 ODP. 014

WSK. Zauważ, że ciąg kwadratów ciągu (a_n) też jest geometryczny, a jego iloraz jest równy kwadratowi ilorazu ciągu (a_n).

SZKIC $\frac{a_1}{1-q} = 2$ i $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 3$; kwadrat pierwszego podzielony przez drugie daje $\frac{1+q}{1-q} = \frac{4}{3}$, czyli $q = \frac{1}{7} \approx 0{,}14$.

14 ODP. $a = 1$, $b = 3$ oraz $c = 9$.

WSK. Skorzystaj z własności ciągu arytmetycznego (środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną sąsiadów) oraz geometrycznego (kwadrat środkowego wyrazu jest iloczynem sąsiadów). Wykorzystaj podaną zależność $c - b = 6$, aby uzależnić wszystkie zmienne od jednej, np. od a.

SZKIC $c = b + 6$; arytmetyczny: $4b = 2a + b + 7$, geometryczny: $b^2 = a(b+6)$. Po wyrugowaniu a: $b^2 + 11b - 42 = 0$, $b = 3$ (bo dodatnie), stąd $a = 1$, $c = 9$.

15 ODP. $a_1 = 3$.

WSK. Informacja o tym, że a_1, a_2 i a_3 są odpowiednio czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego, prowadzi do kluczowego równania w tym zadaniu. Załóżmy, że (b_n) jest tym ciągiem arytmetycznym. Stąd $a_1 = b_4$, $a_2 = b_2$ i $a_3 = b_1$. Zauważmy, że $b_4 - b_2 = 2r$ oraz $b_2 - b_1 = r$, stąd $2(b_2 - b_1) = b_4 - b_2$.

SZKIC W ciągu arytmetycznym $b_4 - b_2 = 2(b_2 - b_1)$, czyli $a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3)$: $1 - q = 2q(1-q)$, więc $q = \frac{1}{2}$. Wtedy $a_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{4}$, $a_1 = 3$.

16 ODP. $q = \frac{1}{3}$.

WSK. Wykorzystaj **własności ciągu arytme-**

tycznego, aby zapisać a i c przy użyciu środkowego wyrazu b i różnicy r. Następnie zastosuj własność ciągu geometrycznego (kwadrat środkowego wyrazu równa się iloczynowi skrajnych) do drugiego ciągu. Otrzymasz równanie, które pozwoli wyznaczyć stosunek $\frac{r}{b}$, niezbędny do obliczenia ilorazu q.

SZKIC $a = b - r$, $c = b + r$; warunek $\left(\frac{2}{3b}\right)^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{5b-r}$ daje $11b^2 - 24br + 4r^2 = 0$, czyli $r = \frac{b}{2}$ lub $r = \frac{11b}{2}$; dodatniość a wybiera $r = \frac{b}{2}$ i $q = \frac{2a}{3b} = \frac{1}{3}$.

17 ODP. 187.

WSK. Pamiętaj, że nieskończony szereg geometryczny jest zbieżny, gdy jego iloraz q spełnia warunek:

$$|q| < 1.$$

SZKIC $q = \frac{1}{2x-371}$; dodatnie wyrazy dają $2x > 371$, zbieżność $q < 1$ daje $2x - 371 > 1$, czyli $x > 186$. Najmniejsza całkowita: 187.

18 ODP. $b_1 = 129$.

WSK. Wykorzystaj zależność między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego, aby wyznaczyć iloraz q. Następnie oblicz sumę nieskończonego szeregu geometrycznego (a_n) i przyrównaj ją do sumy częściowej ciągu arytmetycznego (b_n).

SZKIC Z $q = \frac{5}{4}q^2 + \frac{1}{5}$: $(5q - 2)^2 = 0$, $q = \frac{2}{5}$. $S = \frac{675}{3/5} = 1125 = 25(b_1 + 12r)$, a $b_4 = b_1 + 3r = a_3 = 108$; stąd $r = -7$, $b_1 = 129$.

19 ODP. $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

WSK. Oznacz iloraz ciągu geometrycznego przez q i wykorzystaj warunek $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$, aby wyznaczyć równanie na q. Następnie rozstrzygnij, dla której z otrzymanych wartości q nieskończony szereg wyrazów nieparzystych jest zbieżny.

SZKIC $1 + q^2 = \frac{5}{2}q$ daje $q = 2$ lub $q = \frac{1}{2}$; zbieżność wyrazów nieparzystych wymaga $|q| < 1$. Z $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$: $a_1 = 12$.

20 ODP. $S = \frac{245}{4}$.

WSK. Zacznij od znalezienia ciągu (a_n), tzn. od znalezienia a_1 i r. W tym celu rozpisz wszystkie warunki dotyczące tego ciągu, korzystając ze **wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego**.

SZKIC $a_1 = 15 - 5r$ i $15 + 9r = (15 - 3r)(9 + 2r)$ dają $r^2 + r - 20 = 0$, $r = 4$ (rosnący), $a_1 = -5$. Wtedy $b_1 = a_{11} = 35$, $b_2 = 15$, $q = \frac{3}{7}$ i $S = \frac{35}{4/7} = \frac{245}{4}$.

21 ODP. $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

WSK. Sześciany wyrazów też tworzą ciąg geometryczny – o ilorazie q^3. Z obu sum wyeliminuj a_1.

SZKIC $a_1 = 14(1-q)$ i $\frac{a_1^3}{1-q^3} = 392$, więc $\frac{7(1-q)^2}{1+q+q^2} = 1$, czyli $6q^2 - 15q + 6 = 0$: $q = \frac{1}{2}$ (bo $|q| < 1$), $a_1 = 7$.

22 ODP. $(x, y, z) = (1, 3, 9)$ lub $(x, y, z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$.

WSK. Opisz trójkę przez x i różnicę r ciągu arytmetycznego $(x, y, z - 4)$ – dwa warunki geometryczności dadzą układ na x i r.

SZKIC $y = x + r$, $z = x + 2r + 4$. Z $y^2 = xz$: $r^2 = 4x$; z $(y - 1)^2 = x(z - 5)$: $x = (r - 1)^2$. Stąd $3r^2 - 8r + 4 = 0$: $r = 2$ daje $(1, 3, 9)$, $r = \frac{2}{3}$ daje $\left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$.

23 ODP. $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

WSK. Zauważ, że ciągi złożone z wyrazów parzystych i nieparzystych są również geometryczne, a ich iloraz jest równy kwadratowi

ilorazu ciągu (a_n).

SZKIC $S_N = \frac{q}{1-q^2}$, $S_P = \frac{q^2}{1-q^2}$, więc $\frac{S_N}{S_P} = \frac{1}{q}$ i $S_N - S_P = \frac{q}{1+q}$. Równanie $q^2 = 1 + q$ ma pierwiastki $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $|q| < 1$ wybiera $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

24 ODP. $aq = 3$.

WSK. Zapisz ciąg geometryczny jako (a, aq, aq^2), wówczas ciąg $(a, aq, aq^2 - 4)$ musi być arytmetyczny. Dalej skorzystaj z faktu, że trzywyrazowy ciąg jest arytmetyczny, gdy środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną sąsiednich wyrazów.

SZKIC $(a, aq, aq^2 - 4)$ arytmetyczny: $2aq = a + aq^2 - 4$, czyli $a(q-1)^2 = 4$. Przy a i q nieparzystych, $q > 1$: $a = 1$, $q = 3$, więc $aq = 3$.

25 ODP. $x = 6$.

WSK. Wyznacz iloraz q szeregu geometrycznego. Pamiętaj, że suma nieskończonego szeregu geometrycznego istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$|q| < 1.$$

Następnie skorzystaj ze **wzoru na sumę szeregu**: $S = \frac{a_1}{1-q}$.

SZKIC $q = -\frac{3}{x-1}$; zbieżność $|x-1| > 3$. $S = \frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2}$ daje $4x^2 - 19x - 30 = 0$: $x = 6$ lub $x = -\frac{5}{4}$, a tylko 6 spełnia warunek zbieżności.

26 ODP. $a_n = 3n + 2$ oraz $b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$.

WSK. To zadanie zawiera bardzo dużo danych, zapisz je wszystkie używając symboli matematycznych. Następnie zacznij od informacji, że suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124.

SZKIC $a_1 = q$, $b_1 = r$. $S_8 = 124$ daje $2q + 7r = 31$, a $b_1 + b_2 = r(1+q) = 18$; stąd $7r^2 - 33r + 36 = 0$, $r = 3$ lub $r = \frac{12}{7}$ – całkowite wyrazy wybierają $r = 3$, $q = 5$.

27 ODP. $S = \frac{2^{11}\pi}{3}$.

WSK. Zauważ, że kwadrat promienia n-tego okręgu wynosi 2^{11-n}. Następnie wyznacz kwadraty promieni okręgów z numerem $2k$ i $2k-1$.

SZKIC $P_k = \pi\left(2^{12-2k} - 2^{11-2k}\right) = \pi \cdot 2^{11-2k}$ – ciąg geometryczny o $a_1 = 2^9\pi$ i $q = \frac{1}{4}$; $S = \frac{2^9\pi}{3/4} = \frac{2^{11}\pi}{3}$.