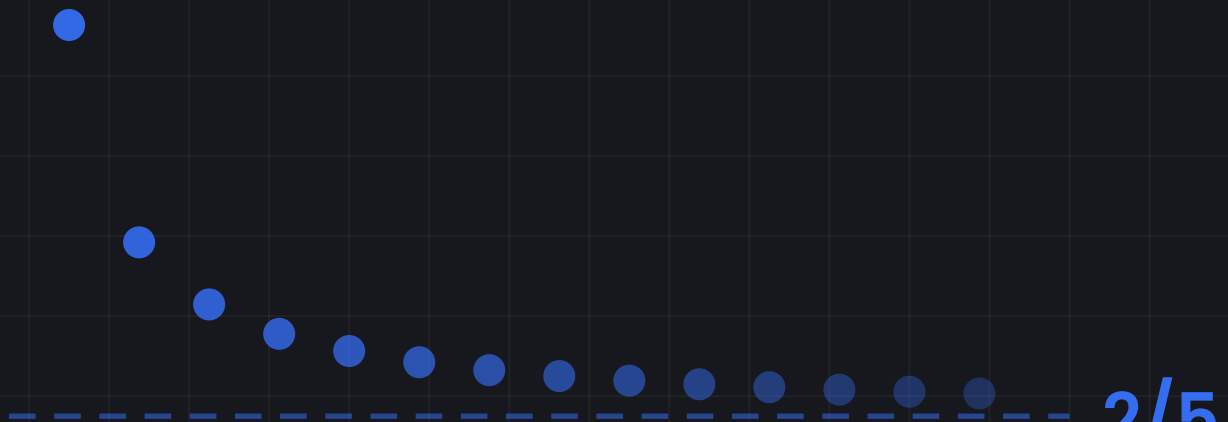


GRANICE CIĄGÓW I FUNKCJI

Granice ciągów i funkcji · matura rozszerzona

ZAKRES
MATURY 2015–2026

09

Tomasz Saweczko · lysyuczymatmy.pl

© 2026 · wszelkie prawa zastrzeżone

TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim**, **Uniwersytecie Warszawskim** i **Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

Zobacz kurs

DODATKOWE MATERIAŁY

- Wszystkie materiały
- Autorskie arkusze próbne
- Krótkie filmy
- Dłuższe filmy

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

Dołącz

Spis treści

1. Granice ciągów **4**

Granica ciągu – intuicja 4

Jak uzasadnić wynik 4

Stopień licznika i mianownika 5

Symbole nieoznaczone 6

Granica z parametrem 7

Symbol Newtona w granicy 8

Granica z pierwiastkami 9

2. Granice funkcji **10**

Granica funkcji w nieskończoności 10

Granice jednostronne 10

Znak zera w mianowniku 12

Granica z wartością bezwzględną 13

Granica funkcji w punkcie 14

3. Ćwiczenia **15**

4. Dodatek **17**

Skąd się bierze reguła stopni 17

Granica ciągu geometrycznego 17

Granica w punkcie a granice jednostronne 17

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania **18**

1

Granice ciągów

Granice ciągów i funkcji pojawiają się mniej więcej w co drugim arkuszu matury rozszerzonej i zawsze są za dwa punkty. Nie są szczególnie trudne, więc warto się do nich przygotować. Ten materiał idzie tą samą drogą co lekcja: najpierw granice ciągów, potem granice funkcji. Każda karta z przykładem i każda ramka z zadaniem ma plakietkę z momentem w filmie.

Granica ciągu – intuicja

Granica ciągu mówi, do jakiej liczby zbliżają się jego wyrazy, gdy n jest coraz większe. Zapis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ czytamy „limes a_n przy n dążącym do nieskończoności". Na maturze prawie wszystkie granice ciągów to ilorazy dwóch wielomianów zmiennej n: w liczniku i w mianowniku stoi funkcja liniowa, kwadratowa, czasem wielomian trzeciego stopnia.

NA OKO

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 0:28

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{5n-1}$.

I Gdy n jest olbrzymie, na przykład równe miliard, trójka w liczniku nie ma praktycznie żadnego znaczenia – jak 3 zł dodane do 2 miliardów złotych. Tak samo minus jedynka w mianowniku.

II Zostaje $\frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}$. Im większe n, tym wyrażenie jest bliższe $\frac{2}{5}$, więc granica jest równa $\frac{2}{5}$.

Jak uzasadnić wynik

Na maturze nie wystarczy napisać wyniku odgadniętego na oko. Patrzymy, jaka jest najwyższa potęga n w *mianowniku*, i wyłączamy ją przed nawias w liczniku i w mianowniku. Można też podzielić przez nią licznik i mianownik – to dokładnie ta sama operacja.

NAJWYŻSZA POTĘGA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:11

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+1}{2n^2+n+5}$.

I Dominują n^2 w liczniku i $2n^2$ w mianowniku, więc spodziewamy się wyniku $\frac{1}{2}$.

II Najwyższa potęga w mianowniku to n^2. Wyłączamy ją przed nawias i skracamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}.$$

III Ułamki $\frac{3}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n}$ i $\frac{5}{n^2}$ dążą do zera: stałą liczbę dzielimy przez coś coraz większego. Zostaje $\frac{1-0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$.

UŁAMEK O ROSNĄCYM MIANOWNIKU

Dla każdej liczby c i każdej liczby $k > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0.$$

Stopień licznika i mianownika

LICZNIK WYŻSZEGO STOPNIA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 5:05

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n^2}{n+3}$.

I Stopień licznika jest wyższy niż stopień mianownika: licznik szybciej ucieka do nieskończoności, więc wynik to $+\infty$ albo $-\infty$. Dla dużych n wyrażenie jest ujemne – spodziewamy się $-\infty$.

II Najwyższa potęga w mianowniku to n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n}-n\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-n}{1+\frac{3}{n}}.$$

III $\frac{1}{n}$ i $\frac{3}{n}$ dążą do zera. W liczniku zostaje $-n$, a $-n$ dąży do minus nieskończoności; mianownik dąży do 1. Granica jest równa $-\infty$.

Gdyby ułamek był odwrócony, $\frac{n+3}{1-n^2}$, granica byłaby równa zeru: teraz to mianownik ma wyższy

stopień i szybciej ucieka do nieskończoności niż licznik.

ILORAZ DWÓCH WIELOMIANÓW

Gdy licznik i mianownik są wielomianami zmiennej n:

- stopnie są równe – granica jest ilorazem współczynników przy najwyższych potęgach,
- stopień licznika jest wyższy – granica jest równa $+\infty$ albo $-\infty$,
- stopień mianownika jest wyższy – granica jest równa 0.

Ta reguła pozwala przewidzieć wynik i sprawdzić rachunek. Na maturze trzeba jednak pokazać przekształcenie: wyłączenie najwyższej potęgi mianownika przed nawias.

RÓŻNICA DWÓCH UŁAMKÓW **PRZYKŁAD Z LEKCJI · 7:12**

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{11n^3+6n+5}{6n^3+1}-\dfrac{2n^2+2n+1}{5n^2-4}\right)$.

I Każdy ułamek rządzi się swoim prawem. W pierwszym najwyższa potęga to n^3 i w liczniku, i w mianowniku, więc dąży on do $\frac{11}{6}$. W drugim najwyższa potęga to n^2, więc dąży on do $\frac{2}{5}$.

II Obie granice istnieją i są liczbami, więc granica różnicy jest różnicą granic: $\frac{11}{6}-\frac{2}{5}=\frac{55-12}{30}=\frac{43}{30}$.

Symbole nieoznaczone

Granicę różnicy wolno liczyć jako różnicę granic tylko wtedy, gdy obie granice są liczbami. Co innego, gdy obie są nieskończonościami. Wyrażenie $\infty-\infty$ to tak zwany **symbol nieoznaczony**: nie da się z niego nic wywnioskować. Każdy z ciągów $n-n$, $2n-n$ i $(n+1)-n$ to „nieskończoność minus nieskończoność”, a ich granice to kolejno 0, ∞ i 1. Symbol nieoznaczony to sygnał, że trzeba coś przekształcić.

NIESKOŃCZONOŚĆ MINUS NIESKOŃCZONOŚĆ

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 8:38

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}-\dfrac{2n^2-1}{n+2}\right)$.

I W obu ułamkach stopień licznika jest wyższy, więc oba dążą do nieskończoności – to symbol $\infty-\infty$. Jedyne przekształcenie, jakie tu można zrobić, to odjąć ułamki.

II Wspólny mianownik to $(n+1)(n+2)$:

$$\frac{(n^2+1)(n+2)-(2n^2-1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{-n^3+2n+3}{n^2+3n+2}.$$

III Na oko: w liczniku zostaje $n^3-2n^3=-n^3$, w mianowniku n^2, czyli $-n$, a to dąży do minus nieskończoności. Formalnie wyłączamy n^2 i dostajemy $\frac{-n+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$, więc granica jest równa $-\infty$.

Nieskończoność minus nieskończoność to nie zero. To symbol nieoznaczony – trzeba wykonać działanie i dopiero wtedy liczyć granicę.

Granica z parametrem

PARAMETR

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 13:06

Wyznacz p, dla którego $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(7p-1)n^3+5pn-3}{(p+1)n^3+n^2+p}=\dfrac{4}{3}$.

I Przy n^3 w liczniku i w mianowniku stoją współczynniki zależne od p, a któryś z nich może być zerem. Dla $p=-1$ znika n^3 w mianowniku: zostaje $\frac{-8n^3}{n^2}=-8n$ i granica jest równa $-\infty$. Dla $p=\frac{1}{7}$ znika n^3 w liczniku: stopień mianownika jest wyższy i granica jest równa 0.

II Żeby granica była równa $\frac{4}{3}$, oba współczynniki muszą być różne od zera. Wtedy reszta wyrazów nie ma znaczenia, n^3 się skraca i granica to $\frac{7p-1}{p+1}$.

III $\frac{7p-1}{p+1}=\frac{4}{3}$, czyli $21p-3=4p+4$, $17p=7$ i $p=\frac{7}{17}$.

Symbol Newtona w granicy

MAJ 2026 · ZADANIE NR 1 | POZIOM WYKONANIA 40% | W FILMIE 16:02 | 2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}.$$

Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. Symbol Newtona trzeba najpierw zamienić na wielomian zmiennej n – potem to zwykła granica ilorazu.

Symbol Newtona to $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tu górna liczba jest o 3 większa od dolnej, $(n+2)-(n-1) = 3$, więc

$$\binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)!}{(n-1)!\cdot 3!}.$$

Silnie skracają się tak jak w $\frac{9!}{7!} = 8\cdot 9$: zostaje tyle czynników, o ile różnią się liczby pod silniami. Tu zostają trzy:

$$\binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)\,(n+1)\,n}{6}.$$

Szóstkę przenosimy do mianownika, żeby nie pisać piętrowego ułamka:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\,(n+1)\,n}{6\left(\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7\right)}.$$

Na oko: w liczniku jest n^3, w mianowniku $6\cdot\frac{1}{2}n^3 = 3n^3$, więc granica wyjdzie $\frac{1}{3}$. Na maturze to uzasadniamy – z każdego nawiasu w liczniku wyłączamy n, a w mianowniku n^3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{6n^3\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)} = \frac{1\cdot 1}{6\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Granica z pierwiastkami

Ten typ granic jest w programie, ale na maturze jeszcze się nie pojawił.

PIERWIASTKI

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 23:25

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)$.

I Oba pierwiastki dążą do nieskończoności, więc to znów symbol $\infty-\infty$.

II Mnożymy i dzielimy przez sumę tych pierwiastków, jak przy usuwaniu niewymierności z mianownika. W liczniku działa wzór $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}.$$

III W liczniku jest $n=n^1$, w mianowniku w praktyce $\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$ razy liczba. Stopień licznika jest wyższy, więc granica jest równa $+\infty$. Formalnie wyłączamy $\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+1}=+\infty,$$

bo licznik dąży do nieskończoności, a mianownik do $\sqrt{2}+1>0$.

2

Granice funkcji

Gdy x dąży do plus albo minus nieskończoności, granicę funkcji liczy się dokładnie tak samo jak granicę ciągu – wystarczy w myślach zamienić x na n. Nowe są granice w punkcie i granice jednostronne.

Granica funkcji w nieskończoności

W NIESKOŃCZONOŚCI

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 28:13

Oblicz $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+8}{x^2-4}-x\right)$.

I Na oko: ułamek to praktycznie $\frac{x^3}{x^2}=x$, a od niego odejmujemy x, więc wynik to 0. Formalnie mamy jednak symbol $\infty-\infty$ i trzeba odjąć.

II Wspólny mianownik to x^2-4. Dla dużych x się nie zeruje, więc nie trzeba się nim przejmować:

$$\frac{x^3+8-x\left(x^2-4\right)}{x^2-4}=\frac{4x+8}{x^2-4}.$$

III Wyłączamy x^2 przed nawias:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{0+0}{1-0}=0.$$

Granice jednostronne

Zapis $x\to 2^-$ znaczy, że x zbliża się do 2 z lewej strony, czyli przez liczby mniejsze od 2: 1,9; 1,99; 1,999 i tak dalej. Zapis $x\to 2^+$ to zbliżanie się z prawej strony, przez liczby większe od 2. Zawsze zaczynamy od wstawienia liczby, do której dąży x. Jeśli wyjdzie liczba, na przykład $\frac{2}{3}$, to jest właśnie granica. Jeśli wyjdzie $\frac{0}{0}$ – kolejny symbol nieoznaczony – trzeba coś przekształcić.

MAJ 2024 · ZADANIE NR 2 | POZIOM WYKONANIA 31% | W FILMIE 31:52 | 2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{(x-2)^2}.$$

Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. Po skróceniu w mianowniku nadal jest zero – o wyniku decyduje znak mianownika.

Po wstawieniu $x=2$ wychodzi $\frac{0}{0}$. Licznik i mianownik zerują się w 2, więc z twierdzenia Bézouta oba dzielą się przez $x-2$. Mianownik to już $(x-2)^2$, a licznik rozkładamy ze wzoru na różnicę sześcianów $a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)\,(x^2+2x+4)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x+4}{x-2}.$$

Licznik dąży teraz do $4+4+4=12$, a mianownik nadal do 0. Liczba bliska 12 podzielona przez liczby coraz bliższe zera, na przykład $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, daje 120, 1200, 12 000, a podzielona przez $-\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{100}$, $-\frac{1}{1000}$ daje -120, -1200, $-12\,000$. Granica to więc $+\infty$ albo $-\infty$ i decyduje znak mianownika. Skoro $x<2$, to $x-2<0$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x+4}{x-2} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty.$$

Zapis $\left[\frac{12}{0^-}\right]$ to nie jest dzielenie przez zero. To skrót zdania: licznik dąży do 12, a mianownik dąży do zera przez wartości ujemne. Nawias kwadratowy działa jak cudzysłów.

lysyuczymatmy.pl

Znak zera w mianowniku

ZNAK MIANOWNIKA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 37:34

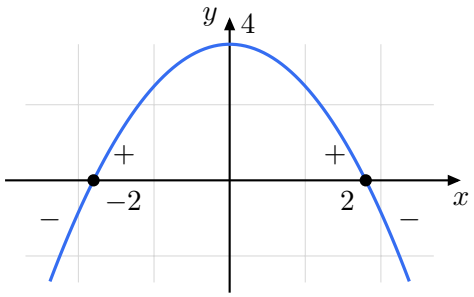
Oblicz $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{4-x^2}$.

I Po wstawieniu 2 wychodzi $\frac{1}{0}$, więc granica to $+\infty$ albo $-\infty$. Decyduje znak mianownika.

II $x \to 2^+$, czyli $x > 2$: wstawiamy 2,1; 2,01 i tak dalej. Wtedy $x^2 > 4$ i mianownik $4 - x^2$ jest ujemny: $\left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$.

III Przy dwójce stoi plus, a przy zerze minus – te znaki nie muszą się zgadzać ani się różnić.

Znak mianownika najłatwiej odczytać z wykresu. Funkcja $y = 4 - x^2$ ma ramiona skierowane w dół i miejsca zerowe -2 i 2. Przy zbliżaniu się do 2 z prawej strony przyjmuje wartości ujemne, a z lewej – dodatnie. Przy -2 jest odwrotnie: z prawej strony dodatnie, z lewej ujemne.



Znak zera w mianowniku nie wynika z plusa ani minusa przy liczbie, do której dąży x. Trzeba sprawdzić, jaki znak ma mianownik po tej stronie.

Granica z wartością bezwzględną

CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 2 W FILMIE 39:54 2 PKT

Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9}.$$

Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. Wartość bezwzględną można opuścić, bo znamy znak wyrażenia pod nią – trzeba to tylko uzasadnić.

Skoro $x \to 3^-$, to $x < 3$, czyli $x - 3 < 0$. Wartość bezwzględna liczby ujemnej to liczba przeciwna, więc

$$|x-3| = -(x-3) = 3-x.$$

Mianownik rozkładamy: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Czynniki $3-x$ i $x-3$ skracają się nie do jedynki, tylko do minus jedynki:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3-x}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{6}.$$

Po skróceniu wstawienie trójki nie daje już symbolu nieoznaczonego, więc wynik to po prostu $-\frac{1}{6}$.

Granica funkcji w punkcie

W PUNKCIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 42:09

Oblicz $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$.

I Po wstawieniu jedynki wychodzi $\frac{0}{0}$. Licznik i mianownik zerują się w 1, więc z twierdzenia Bézouta oba dzielą się przez $x-1$.

II $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Drugi pierwiastek mianownika dają wzory Viète'a: iloczyn pierwiastków to $\frac{c}{a}=-4$, a jeden z nich to 1, więc drugi to -4 i $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.

III Po skróceniu zostaje $\frac{x+1}{x+4}$. Wstawiamy jedynkę: granica jest równa $\frac{2}{5}$.

To w zasadzie wszystko, co trzeba wiedzieć o granicach ciągów i funkcji do matury rozszerzonej. Temat jest o wiele ciekawszy – na studiach dowiecie się o granicach dużo więcej.

3

Ćwiczenia

1 Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x+3}$.

2 Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n^2+3}$.

3 Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n)$.

4 Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^3}{n^3+n}$.

5 Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{9-x^2}$.

6 Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

7 Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n-2)!\cdot n^2}$, gdzie $n\geq 2$.

8 Oblicz granice ciągów.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n}{2n^2+5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3n^3}{n^2+2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+1}{n^2+4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^3}{n^3+n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{3n^2-1}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^2}{2-3n}$

9 Oblicz granice ciągów.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n-1}-\dfrac{n}{2}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{n+3}-\dfrac{2n^2+1}{n+1}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$

10 Oblicz granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x}{x^2+2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-1}{2x^2+x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x-1}-x\right)$

11 Oblicz granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

12 Oblicz granice jednostronne.

a) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+1}{x^2-9}$

c) $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x}{4-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

13 Wyznacz a, dla którego $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+3n}{2n^2-1}=3$.

14 Wyznacz wszystkie wartości p, dla których $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(p^2-1)\,n^2+n}{3n^2+2}=1$.

15 Wyznacz wartość parametru m, dla której

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4-m^2)\,n^3+(m+3)\,n^2+3}{(m^2+3m+2)\,n^3+mn^2-1}=\frac{1}{2}.$$

16 Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-9}{|x^3-2x^2-x-6|}$.

17 Niech a_n oznacza liczbę przekątnych n-kąta wypukłego, $n\geq4$. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$.

18 Rzucamy n razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech a_n oznacza prawdopodobieństwo, że co najmniej raz wypadnie sześć oczek. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

19 Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{x^2+ax-3}{x-3}$, określona dla $x\neq3$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. Wyznacz wartość a, dla której funkcja f ma w punkcie $x_0=3$ granicę właściwą, czyli granicę będącą liczbą, i oblicz tę granicę.

4

Dodatek

Skąd się bierze reguła stopni

Niech licznik ma stopień k i współczynnik $a \neq 0$ przy najwyższej potędze, a mianownik – stopień m i współczynnik $b \neq 0$. Dzielimy licznik i mianownik przez n^m. Mianownik dąży do b: pozostałe składniki to liczby podzielone przez dodatnie potęgi n. W liczniku:

- gdy $k = m$, zostaje a i ułamki dążące do zera, więc granica jest równa $\frac{a}{b}$,
- gdy $k < m$, każdy składnik to liczba podzielona przez dodatnią potęgę n, więc granica jest równa 0,
- gdy $k > m$, składnik $a \cdot n^{k-m}$ rośnie bez ograniczeń, a reszta jest od niego słabsza; granica jest równa $+\infty$, gdy $\frac{a}{b} > 0$, i $-\infty$, gdy $\frac{a}{b} < 0$.

Granica ciągu geometrycznego

Jeżeli $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ – to ta sama obserwacja, dzięki której istnieje suma szeregu geometrycznego. Jeżeli $q > 1$, to q^n rośnie bez ograniczeń, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Przyda się to w ćwiczeniu 18.

Granica w punkcie a granice jednostronne

Funkcja ma granicę w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne w tym punkcie istnieją i są równe. Na przykład dla $\frac{|x-1|}{x^2-1}$ granica prawostronna w 1 to $\frac{1}{2}$, a lewostronna $-\frac{1}{2}$, więc granicy w punkcie 1 ta funkcja nie ma.

20 ★ Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$.

21 ★ Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

22 ★ Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Wykaż, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

lysyuczymatmy.pl

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Przy każdym zadaniu jest wynik, wskazówka i szkic rozumowania, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 ODP. 1

WSK. Najpierw wstaw 2.

SZKIC $\frac{4+1}{2+3} = 1$ – nie wychodzi symbol nieoznaczony, więc to jest granica.

2 ODP. 4

WSK. Przy n^2 w liczniku stoi 2^2, a nie 2.

SZKIC $\frac{4n^2+4n+1}{n^2+3}$; po podzieleniu przez n^2: $\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} \to 4$.

3 ODP. $+\infty$

WSK. To $\infty - \infty$, a nie zero.

SZKIC $n^2 - n = n\,(n-1)$, a oba czynniki rosną bez ograniczeń.

4 ODP. -2

WSK. Stopnie są równe.

SZKIC $\frac{\frac{1}{n^3}-2}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{0-2}{1+0} = -2$.

5 ODP. $-\infty$

WSK. Sprawdź znak mianownika dla $x > 3$.

SZKIC $x > 3$, więc $x^2 > 9$ i $9 - x^2 < 0$: $\left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$.

6 ODP. $-\infty$

WSK. Dla $x \to -\infty$ dominuje $\frac{x^2}{x} = x$.

SZKIC $\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{1}{x}}$; licznik dąży do $-\infty$, mianownik do 1.

7 ODP. 1

WSK. Skróć silnie jak w $\frac{9!}{7!}$.

SZKIC $\frac{n!}{(n-2)!} = n\,(n-1)$, więc $\frac{n^2-n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$.

8 ODP. a) 2; b) $-\infty$; c) 0; d) 8; e) $\frac{1}{3}$; f) $-\infty$

WSK. Porównaj stopnie licznika i mianownika.

SZKIC a) $\frac{4}{2}$; b) stopień licznika wyższy, a dla dużych n wyrażenie jest ujemne; c) stopień mianownika wyższy; d) w liczniku $8n^3 + \ldots$; e) w liczniku $n^2 + 3n + 2$; f) $\frac{n^2-2n+1}{2-3n}$, stopień licznika wyższy, dla dużych n wyrażenie jest ujemne.

9 ODP. a) -1; b) $\frac{1}{4}$; c) -4; d) 2

WSK. Najpierw odejmij; w d) pomnóż i podziel przez sumę.

SZKIC a) $\frac{n^2-n(n+1)}{n+1} = \frac{-n}{n+1}$; b) $\frac{2\left(n^2+1\right)-n(2n-1)}{2(2n-1)} = \frac{n+2}{4n-2}$; c) $\frac{2n^2(n+1)-\left(2n^2+1\right)(n+3)}{(n+3)(n+1)} = \frac{-4n^2-n-3}{n^2+4n+3}$; d) $\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1} \to 2$.

10 ODP. a) 3; b) $-\infty$; c) 1

WSK. Tak jak przy ciągach: najwyższa potęga mianownika.

SZKIC a) stopnie równe; b) dominuje $\frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2}$; c) $\frac{x^2+3-x(x-1)}{x-1} = \frac{x+3}{x-1} \to 1$.

11 ODP. a) 4; b) 3; c) $\frac{1}{6}$; d) 2

WSK. Wychodzi $\frac{0}{0}$ – rozłóż i skróć.

SZKIC a) $x+2$; b) x^2-x+1; c) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}$; d) $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}$.

12 ODP. a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$

WSK. Ustal znak mianownika albo wyrażenia pod wartością bezwzględną.

SZKIC a) $\left[\frac{1}{0^-}\right]$; b) $x < 3$, więc $x^2 - 9 < 0$: $\left[\frac{4}{0^-}\right]$; c) $x < -2$, więc $4 - x^2 < 0$: $\left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$; d) $x > 1$: $\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$; e) $x < 1$:

$\frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$.

13 ODP. $a = 6$

WSK. Stopnie są równe, granica to $\frac{a}{2}$.

SZKIC $\frac{a}{2} = 3$; dla $a = 0$ granica byłaby równa 0.

14 ODP. $p = 2$ albo $p = -2$

WSK. Granica to $\frac{p^2-1}{3}$.

SZKIC $p^2 - 1 = 3$, czyli $p^2 = 4$; dla $p = \pm 1$ granica byłaby równa 0.

15 ODP. $m = 1$

WSK. Oba współczynniki przy n^3 muszą być różne od zera.

SZKIC $\frac{4-m^2}{m^2+3m+2} = \frac{1}{2}$ daje $m^2 + m - 2 = 0$: $m = 1$ albo $m = -2$. Dla $m = -2$ znikają oba współczynniki przy n^3 i granica to $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$, więc zostaje $m = 1$.

16 ODP. $-\frac{3}{7}$

WSK. Wyrażenie pod wartością bezwzględną zeruje się w 3.

SZKIC $x^3 - 2x^2 - x - 6 = (x-3)(x^2+x+2)$, $x^2+x+2 > 0$, a $x-3 < 0$, więc wartość bezwzględna to $-(x-3)(x^2+x+2)$. Zostaje $-\frac{x+3}{x^2+x+2} \to -\frac{6}{14} = -\frac{3}{7}$.

17 ODP. $\frac{1}{2}$

WSK. n-kąt ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.

SZKIC $\frac{n^2-3n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2n} \to \frac{1}{2}$.

18 ODP. 1

WSK. Zdarzenie przeciwne: ani razu szóstka.

SZKIC $a_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, a $\left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0$, bo $\frac{5}{6} < 1$.

19 ODP. $a = -2$, granica 4

WSK. Licznik też musi dążyć do zera.

SZKIC Mianownik dąży do 0, więc granica jest liczbą tylko wtedy, gdy licznik zeruje się w 3: $9 + 3a - 3 = 0$, $a = -2$. Wtedy $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ i granica to $3 + 1 = 4$.

Dodatek

20 ODP. 1

WSK. Pomnóż i podziel przez sumę pierwiastków.

SZKIC $\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$; po podzieleniu przez n: $\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{2}{2} = 1$.

21 ODP. $\frac{1}{4}$

WSK. To $\infty - \infty$ – odejmij ułamki.

SZKIC $\frac{x+2-4}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} \to \frac{1}{4}$.

22 zadanie na dowód

WSK. Policz obie granice jednostronne.

SZKIC Dla $x > 0$ mamy $f(x) = 1$, a dla $x < 0$ mamy $f(x) = -1$. Granice jednostronne w 0 to 1 i -1, są różne, więc granicy w 0 nie ma.