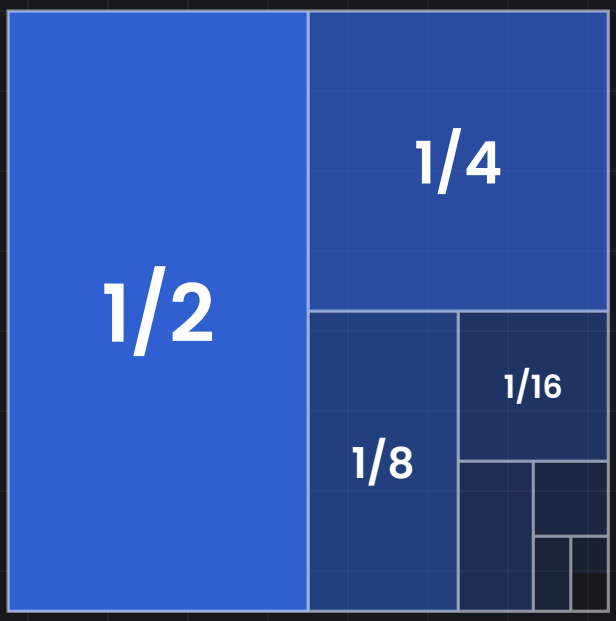


CIĄGI I SZEREG GEOMETRYCZNY

Ciągi i szereg geometryczny · matura rozszerzona

ZAKRES

MATURY 2015–2026

08

Tomasz Saweczko · lysyuczymatmy.pl

© 2026 · wszelkie prawa zastrzeżone

TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim**, **Uniwersytecie Warszawskim** i **Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

Zobacz kurs

DODATKOWE MATERIAŁY

- Wszystkie materiały
- Autorskie arkusze próbne
- Krótkie filmy
- Dłuższe filmy

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

Dołącz

Spis treści

1. Ciągi i ciąg arytmetyczny **4**

Czym jest ciąg 4

Ciąg Fibonacciego 5

Ciąg arytmetyczny 6

Ciąg arytmetyczny to funkcja liniowa 7

Suma wyrazów ciągu arytmetycznego 8

Ile jest wyrazów 9

Monotoniczność ciągu arytmetycznego 10

2. Ciąg geometryczny i szereg geometryczny **11**

Ciąg geometryczny 11

Dwa wyrazy – jeden ciąg albo dwa 12

Suma wyrazów ciągu geometrycznego 13

Monotoniczność ciągu geometrycznego 14

Szereg geometryczny 15

Co drugi wyraz 16

3. Zadania maturalne **17**

Wyrazy ciągu geometrycznego w ciągu arytmetycznym 17

Liczby całkowite nieparzyste 18

Jedno równanie, dwie niewiadome 19

Szereg sześcianów 20

Szereg z parametrem 21

Ciąg arytmetyczny z trzema wyrazami geometrycznymi 22

4. Ćwiczenia **23**

5. Dodatek **26**

Suma ciągu arytmetycznego – sposób Gaussa 26

Suma ciągu geometrycznego – inny sposób 26

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania **27**

1

Ciągi i ciąg arytmetyczny

Jeśli zrobiliście poprzednie lekcje, ciągi i szereg geometryczny będą dla Was bułką z masłem: jest tu bardzo dużo algebry, a tylko kilka nowych pojęć. Ten materiał idzie tą samą drogą co lekcja: najpierw ciągi w ogóle i ciąg arytmetyczny, potem ciąg geometryczny i szereg geometryczny, na końcu sześć zadań maturalnych. Wszystkie wzory wyprowadzamy sami – lepiej rozumieć wzór, niż przepisywać go z tablic. Każda karta z przykładem i każda ramka z zadaniem ma plakietkę z momentem w filmie.

Czym jest ciąg

W szkole wystarcza prosta definicja: **ciąg liczbowy to ponumerowane liczby**. Liczby mogą iść według jasnej reguły, jak $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$, albo bez żadnej widocznej reguły, jak kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\pi = 3{,}1415\ldots$, czyli $1, 4, 1, 5, \ldots$ Ciągi arytmetyczne i geometryczne to tylko dwa szczególne rodzaje ciągów.

Kolejne liczby to **wyrazy ciągu**: a_1 to pierwszy wyraz, a_2 – drugi i tak dalej; dolny indeks podaje numer wyrazu. Nieskończony ciąg to w gruncie rzeczy funkcja, której dziedziną są liczby naturalne – zamiast $f(n)$ piszemy a_n.

WZÓR JAWNY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:22

Ciąg jest określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot n + 5$. Oblicz a_1 i a_2.

I Do wzoru jawnego wstawiamy po prostu numer wyrazu: $a_1 = (-1)^1 \cdot 1 + 5 = 4$, $a_2 = (-1)^2 \cdot 2 + 5 = 7$.

WZÓR REKURENCYJNY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 3:46

Ciąg jest określony warunkami $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 2a_n + 3$ dla $n \geq 1$. Oblicz a_2 i a_3.

I Wzór rekurencyjny to maszynka do robienia następnego wyrazu z poprzedniego: a_{n+1} to wyraz, który stoi zaraz po a_n.

II Dla $n = 1$: $a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$. Dla $n = 2$: $a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$.

III Wada takiego opisu: żeby policzyć a_{100}, trzeba policzyć wszystkie wcześniejsze wyrazy. W szkole nie trzeba umieć wyznaczać wzoru jawnego ciągu danego rekurencyjnie.

Ciąg Fibonacciego

CIĄG FIBONACCIEGO

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 6:24

Ciąg Fibonacciego określamy warunkami $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Wypisz jego kilka kolejnych wyrazów.

I Każdy następny wyraz to suma dwóch poprzednich – dlatego trzeba podać dwa pierwsze wyrazy, żeby maszynka ruszyła.

II $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 1 + 2 = 3$, $a_5 = 2 + 3 = 5$, $a_6 = 3 + 5 = 8$ i tak dalej.

Ciąg Fibonacciego ma też wzór jawny, choć nikt by się go nie spodziewał:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Mimo pierwiastków daje same liczby naturalne. Skąd się bierze? Z zależności $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ powstaje równanie $x^2 = x + 1$, czyli $x^2 - x - 1 = 0$. Jego wyróżnik to $\Delta = 5$, a pierwiastki to $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ – te same liczby, które stoją we wzorze. Dlaczego to działa, dowiecie się na studiach, na matematyce dyskretnej; to daleko poza programem.

Leonardo z Pizy (przełom XII i XIII wieku) za życia nie nazywał się Fibonacci – ten przydomek nadano mu później. Ciąg nie był jego odkryciem: znali go wcześniej matematycy indyjscy. Nazwę zawdzięcza zadaniu o rozmnażaniu się królików z jego wielkiego dzieła *Liber Abaci* (1202). Leonardo jako jeden z pierwszych w Europie używał kreski ułamkowej (w świecie arabskim wcześniej al-Hassar, XII wiek) i traktował liczby ujemne jak dług (w Indiach robił to już w VII wieku Brahmagupta). Upowszechnił w Europie cyfry arabsko-indyjskie i zero – rachunki na cyfrach rzymskich były drogą przez mękę.

Ciąg arytmetyczny

W ciągu arytmetycznym każdy następny wyraz powstaje przez dodanie tej samej liczby r, nazywanej **różnicą** ciągu, na przykład $5, 8, 11, 14, 17$ przy $r = 3$. Cofając się, odejmujemy r. Różnica może być ujemna: $10, 8, 6, 4$ to ciąg o różnicy $r = -2$. Gdy od wyrazu odejmiemy wyraz poprzedni, zawsze dostaniemy r – stąd nazwa. Pierwszy wyraz i różnica wyznaczają cały ciąg.

WYRAZ OGÓLNY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 15:55

Jak wyrazić dowolny wyraz ciągu arytmetycznego przez a_1 i r?

I $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$ – dodajemy zawsze o jedno r mniej, niż wynosi numer wyrazu.

II $a_7 = a_1 + 6r$, $a_{11} = a_1 + 10r$, $a_{20} = a_1 + 19r$, a ogólnie $a_n = a_1 + (n-1)\,r$.

WYRAZ OGÓLNY CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r.$$

Skąd nazwa „arytmetyczny”? W ciągu $3, 7, 11, 15, 19$ środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną swoich sąsiadów, $\frac{7+15}{2} = 11$, a także wyrazów oddalonych o dwa miejsca, $\frac{3+19}{2} = 11$. Dowód jest prosty: trzy kolejne wyrazy możemy zapisać jako $a - r$, a, $a + r$, a wtedy $\frac{(a-r)+(a+r)}{2} = a$. Nawias w zapisie (a, b, c) podkreśla, że kolejność liczb jest ważna.

TRZY WYRAZY CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b = \frac{a+c}{2}, \qquad \text{czyli} \qquad 2b = a + c.$$

Ciąg arytmetyczny to funkcja liniowa

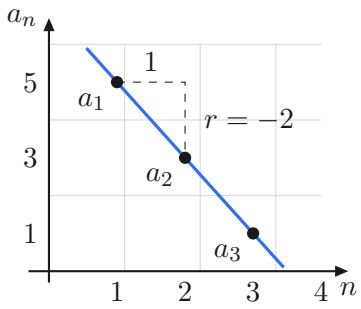
FUNKCJA LINIOWA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 21:36

Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 5$ i $r = -2$.

I $a_n = 5 + (n-1) \cdot (-2) = 5 - 2n + 2 = -2n + 7$.

II To wzór funkcji liniowej $y = -2x + 7$ wziętej tylko w punktach $1, 2, 3, \ldots$ Krok o 1 w prawo zmienia wartość o współczynnik kierunkowy, a ten jest równy różnicy ciągu.



Każdy ciąg arytmetyczny to funkcja liniowa wzięta w liczbach naturalnych. Wzór $a_n = 5n - 7$ od razu zdradza ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 5$ i pierwszym wyrazie $a_1 = 5 - 7 = -2$. Wzór $a_n = 5n^2 + n - 1$ pochodzi od funkcji kwadratowej, więc ten ciąg arytmetyczny nie jest.

DWA WYRAZY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 24:58

W ciągu arytmetycznym $a_2 = 7$ i $a_{11} = -1$. Wyznacz a_1 i r.

I Dwa wyrazy to jak dwa punkty prostej – wystarczą, żeby wyznaczyć cały ciąg.

II $a_1 + r = 7$ i $a_1 + 10r = -1$. Odejmujemy równania stronami: $9r = -8$, czyli $r = -\frac{8}{9}$, a $a_1 = 7 - r = \frac{71}{9}$.

III Znając a_1 i r, policzymy każdy wyraz i każdą sumę. Nie zawsze jest to najkrótsza droga, ale zawsze prowadzi do celu.

Suma wyrazów ciągu arytmetycznego

SUMA OD 1 DO 100

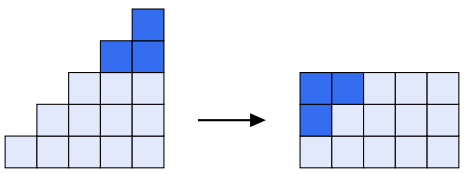
PRZYKŁAD Z LEKCJI · 27:07

Złośliwy nauczyciel kazał małemu Gaussowi dodać liczby od 1 do 100. Gauss miał to zrobić w kilkanaście sekund. Jak?

I Skrajne liczby dają w sumie $1 + 100 = 101$, przedostatnie skrajne $2 + 99 = 101$ i tak dalej.

II Takich par jest 50, więc $1 + 2 + \ldots + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$.

Sumę dobrze sobie wyobrażać jak wyrównywanie: słupki z klocków o wysokościach $1, 2, 3, 4, 5$ można przełożyć w prostokąt 5×3. Klocków jest 15, a średnia wysokość słupka to $15 : 5 = 3$.



Zróbmy to samo ogólnie. Suma n początkowych wyrazów to

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_1 + (n-1)\,r)\,.$$

Pierwszy i ostatni wyraz dają razem $2a_1 + (n-1)\,r$. Drugi i przedostatni – to samo, bo pierwszy zyskuje jedno r, a drugi jedno traci. Każdą taką parę zamieniamy na dwie równe liczby, jak

klocki w prostokąt: w przykładzie z Gaussem $1 + 100 = 50{,}5 + 50{,}5$. Suma się nie zmienia, a dostajemy n jednakowych liczb $\frac{2a_1+(n-1)r}{2}$. Ponieważ $a_1 + (n-1)\,r = a_n$, to po prostu średnia pierwszego i ostatniego wyrazu.

SUMA POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\,r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Ile jest wyrazów

Przy sumie ciągu arytmetycznego największym kłopotem często nie są pierwszy i ostatni wyraz, tylko ich liczba. Ile jest liczb od 5 do 100? Nie $100 - 5 = 95$. Od 2 do 4 są trzy liczby: 2, 3 i 4, a $4 - 2 = 2$. Od 1 do 100 jest 100 liczb, od 1 do 4 – cztery, więc od 5 do 100 jest ich 96:

$$5 + 6 + \ldots + 100 = \frac{5 + 100}{2} \cdot 96 = 5040.$$

Tak samo od 7 do 121 jest $121 - 6 = 115$ liczb.

Liczb całkowitych od m do k jest $k - m + 1$, a nie $k - m$.

LICZBA WYRAZÓW

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 39:40

Ile wyrazów ma ciąg $7, 12, 17, \ldots, 207$ i ile wynosi ich suma?

I To ciąg arytmetyczny: $a_1 = 7$, $r = 5$. Wszystkie wyrazy dają z dzielenia przez 5 resztę 2, a 207 też – więc 207 jest wyrazem tego ciągu.

II Numer ostatniego wyrazu to liczba wyrazów: $7 + (n-1) \cdot 5 = 207$, czyli $5\,(n-1) = 200$, $n - 1 = 40$ i $n = 41$.

III $S_{41} = \frac{7+207}{2} \cdot 41 = 4387$.

Ten sposób przydaje się też w kombinatoryce i w rachunku prawdopodobieństwa, gdy trzeba policzyć, ile liczb z jakiegoś przedziału ma daną własność.

Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Ciąg $1, 2, 3, 4, 5$ jest **rosnący**, ciąg $1, 1, 1, 1$ – **stały**, a ciąg $5, 4, 3, 2, 1$ – **malejący**. W ciągu arytmetycznym decyduje o tym różnica, tak jak współczynnik kierunkowy o monotoniczności funkcji liniowej: przy $r > 0$ ciąg jest rosnący, przy $r = 0$ – stały, a przy $r < 0$ – malejący. Inne ciągi mogą nie być ani rosnące, ani malejące, ani stałe, jak $1, -1, 1, -1, \ldots$ – to akurat ciąg geometryczny.

2

Ciąg geometryczny i szereg geometryczny

Ciąg geometryczny pod względem pomysłu nie różni się wiele od arytmetycznego – zamiast dodawać, mnożymy. Diabeł tkwi jednak w szczegółach: znaki ilorazu, dwa możliwe ciągi spełniające te same warunki i monotoniczność, której nie da się odczytać z samego ilorazu.

Ciąg geometryczny

W ciągu geometrycznym każdy następny wyraz powstaje przez pomnożenie poprzedniego przez tę samą liczbę q, nazywaną **ilorazem** ciągu: $2, 4, 8, 16, 32, 64$ to ciąg o ilorazie $q = 2$. Cofając się, dzielimy przez q. Gdy wyraz podzielimy przez poprzedni, zawsze dostaniemy q – stąd nazwa, tak jak różnica w ciągu arytmetycznym. Iloraz może być ujemny: w ciągu $2, -4, 8, -16, \ldots$ $(q = -2)$ znaki zmieniają się na przemian, a $1, -1, 1, -1, \ldots$ to ciąg o ilorazie -1. Ciąg $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ ma iloraz $\frac{1}{2}$. Zakładamy, że $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$.

WYRAZ OGÓLNY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 49:28

Jak wyrazić dowolny wyraz ciągu geometrycznego przez a_1 i q?

I $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$, $a_4 = a_1 q^3$ – potęga ilorazu jest o 1 mniejsza od numeru wyrazu.

II $a_7 = a_1 q^6$, $a_{11} = a_1 q^{10}$, a ogólnie $a_n = a_1 q^{n-1}$ – to samo rozumowanie co przy ciągu arytmetycznym.

WYRAZ OGÓLNY CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Skąd nazwa „geometryczny”? Jeśli (a, b, c) jest ciągiem geometrycznym, to $\frac{c}{b} = q = \frac{b}{a}$, a po pomnożeniu na krzyż $b^2 = ac$. Po spierwiastkowaniu dostajemy $|b| = \sqrt{ac}$: środkowy wyraz jest średnią geometryczną skrajnych tylko wtedy, gdy jest dodatni.

TRZY WYRAZY CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

Liczby a, b, c różne od zera tworzą ciąg geometryczny (a, b, c) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b^2 = ac.$$

Z równości $b^2 = ac$ nie wynika $b = \sqrt{ac}$, tylko $|b| = \sqrt{ac}$. Najlepiej pamiętać warunek w postaci: kwadrat środkowego jest równy iloczynowi skrajnych.

Ciąg arytmetyczny to ukryta funkcja liniowa, a geometryczny – ukryta funkcja wykładnicza. Dla $a_1 = 5$ i $q = 2$ mamy $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$, czyli wartości funkcji $y = 5 \cdot 2^{x-1}$ w liczbach naturalnych. Przy dodatnim ilorazie analogia jest pełna; funkcji wykładniczej o ujemnej podstawie nie ma. Tak jak dwa punkty wyznaczają funkcję wykładniczą, tak dwa wyrazy wystarczą do wyznaczenia ciągu geometrycznego – z jednym zastrzeżeniem.

Dwa wyrazy – jeden ciąg albo dwa

JEDEN CIĄG

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 56:54

W ciągu geometrycznym $a_2 = 8$ i $a_{11} = -1$. Wyznacz a_1 i q.

I $a_1 q = 8$ i $a_1 q^{10} = -1$. Dzielimy drugie równanie przez pierwsze – wolno, bo $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$: $q^9 = -\frac{1}{8}$.

II $8 = 2^3$, więc $q = -\frac{1}{\sqrt[9]{2^3}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, a $a_1 = \frac{8}{q} = -8\sqrt[3]{2}$.

DWA CIĄGI

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 59:20

W ciągu geometrycznym $a_2 = 2$ i $a_4 = 32$. Wyznacz a_1 i q.

I $a_1 q = 2$ i $a_1 q^3 = 32$, więc po podzieleniu $q^2 = 16$.

II To równanie ma dwa rozwiązania: $q = 4$ i wtedy $a_1 = \frac{1}{2}$ albo $q = -4$ i wtedy $a_1 = -\frac{1}{2}$. Warunki spełniają dwa różne ciągi.

Tak samo w prostym zadaniu: liczby 2, x, 3 tworzą ciąg geometryczny, gdy $x^2 = 2 \cdot 3 = 6$, czyli $x = \sqrt{6}$ albo $x = -\sqrt{6}$ – znów dwa ciągi.

Przy parzystej potędze ilorazu dostajemy dwie możliwości. Założenia zadania (ciąg rosnący, wyrazy dodatnie, $|q| < 1$) często każą jedną z nich odrzucić – warto je od razu zaznaczyć w treści.

Suma wyrazów ciągu geometrycznego

Ze wzorów skróconego mnożenia:

$$q^2 - 1 = (q-1)(q+1), \qquad q^3 - 1 = (q-1)\left(q^2+q+1\right),$$
$$q^4 - 1 = (q-1)\left(q^3+q^2+q+1\right).$$

Po wymnożeniu przez q wszystkie potęgi w nawiasie rosną o 1, a po wymnożeniu przez -1 niższe potęgi się kasują i zostaje -1. Ogólnie

$$q^n - 1 = (q-1)\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1\right).$$

Dla $q \neq 1$ dzielimy przez $q-1$, mnożymy obie strony przez a_1 i po prawej stronie dostajemy $a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}$, czyli sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

SUMA POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1, \qquad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1.$$

SZACHOWNICA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 1:07:42

Wynalazca szachów poprosił władcę o nagrodę: jedno ziarnko ryżu na pierwszym polu szachownicy, dwa na drugim, cztery na trzecim i tak dalej – na każdym polu dwa razy więcej. Ile ziaren było na całej szachownicy?

I Na k-tym polu jest 2^{k-1} ziaren, więc na ostatnim, 64. polu – 2^{63}, a nie 2^{64}.

II $S_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$.

III $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, więc $2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 \approx 16 \cdot 10^{18}$ – szacunek z niedomiarem, bo $2^{10} > 1000$. Dokładnie $2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$: miliardy miliardów ziaren.

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Tu trzeba uważać, bo sam iloraz nie wystarcza. Przy $q < 0$ znaki zmieniają się na przemian, więc ciąg nie jest ani rosnący, ani malejący. Przy $q = 1$ ciąg jest stały. Przy dodatnim ilorazie decyduje jeszcze znak pierwszego wyrazu: ciąg $-1, -2, -4, \ldots$ ma iloraz 2, a jest malejący; ciąg $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}$ ma iloraz $\frac{1}{2}$ i maleje, ale $-8, -4, -2, -1, \ldots$ przy tym samym ilorazie rośnie.

	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$a_1 > 0$	malejący	stały	rosnący
$a_1 < 0$	rosnący	stały	malejący

Szereg geometryczny

KWADRAT

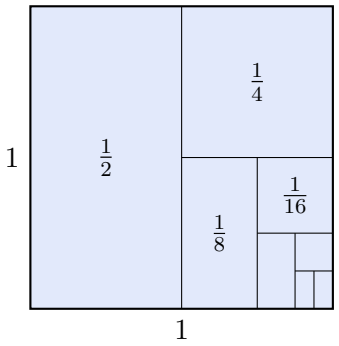
PRZYKŁAD Z LEKCJI · 1:14:13

Kwadrat o polu 1 dzielimy na pół, potem pozostałą część znowu na pół i tak dalej. Ile wynosi suma pól kolejnych kawałków?

I Pola kawałków to $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ – ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $\frac{1}{2}$ i ilorazie $\frac{1}{2}$.

II Po n krokach $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

III Gdy n rośnie, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ zbliża się do zera, a suma – do 1, czyli do pola całego kwadratu.



Ogólnie $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. Przy $q = 2$ potęga 2^n rośnie bez ograniczeń i suma też. Ale gdy $|q| < 1$, potęga q^n zbliża się do zera – tak jak $\left(\frac{5}{7}\right)^n$ albo $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, która zmienia znak, a mimo to maleje co do wartości bezwzględnej. Wtedy suma wszystkich wyrazów, czyli suma **szeregu geometrycznego**, istnieje:

SUMA SZEREGU GEOMETRYCZNEGO

Jeżeli $|q| < 1$, to

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Warunek $|q| < 1$ to kluczowa część każdego zadania z szeregiem geometrycznym. Zwykle wychodzą dwa ilorazy i jeden z nich trzeba odrzucić.

Na studiach szereg zapisuje się znakiem sumy: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$. Na przykład $\sum_{n=1}^{3} x_n = x_1 + x_2 + x_3$. Na maturze taki zapis się nie pojawia.

Co drugi wyraz

Wyrazy o numerach nieparzystych, $a_1, a_1q^2, a_1q^4, \ldots$, też tworzą ciąg geometryczny, ale o ilorazie q^2; wyrazy o numerach parzystych tak samo. Co trzeci wyraz daje ciąg o ilorazie q^3. Przydaje się to w zadaniach o sumie wyrazów o numerach parzystych albo nieparzystych.

3

Zadania maturalne

Sześć zadań z matur – nieco trudniejszych niż typowe, bo na nich najlepiej widać, jak myśleć o ciągach: dobrze zapisać wyrazy, ułożyć równanie i odrzucić rozwiązanie, które nie spełnia warunków zadania.

Wyrazy ciągu geometrycznego w ciągu arytmetycznym

CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 10 | POZIOM WYKONANIA 34% | W FILMIE 1:24:28 | 5 PKT

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}.$$

Wyrazy a_1, a_2, a_3 są odpowiednio czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego.

Oblicz a_1.

Na co zwrócić uwagę. Słowo „rosnącego” to sygnał, że jedno z rozwiązań trzeba będzie odrzucić – warto je od razu zaznaczyć.

Wyrazy ciągu geometrycznego zapisujemy bez indeksów: a, aq, aq^2, a wtedy $a + aq + aq^2 = \frac{21}{4}$. Niech (b_n) będzie ciągiem arytmetycznym, w którym $b_4 = a$, $b_2 = aq$ i $b_1 = aq^2$. Wyrazy o numerach różniących się o 1 różnią się o r, a o numerach różniących się o 2 – o $2r$. Stąd $2\,(b_2 - b_1) = b_4 - b_2$, czyli

$$3b_2 - 2b_1 - b_4 = 0, \qquad 3aq - 2aq^2 - a = 0.$$

Dzielimy przez $a \neq 0$ i mnożymy przez -1: $2q^2 - 3q + 1 = 0$. Jeden pierwiastek łatwo zgadnąć, $q = 1$, a drugi daje wzór Viète’a na iloczyn: $q = \frac{1}{2}$. Przy $q = 1$ wszystkie trzy wyrazy byłyby równe, a ciąg arytmetyczny nie byłby rosnący – zostaje $q = \frac{1}{2}$. Wtedy

$$a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = \frac{21}{4}, \qquad 4a + 2a + a = 21, \qquad a = 3.$$

Sprawdzenie: wyrazy to 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, więc $b_1 = \frac{3}{4}$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $b_4 = 3$ – ciąg arytmetyczny o różnicy $\frac{3}{4}$, rosnący. Odpowiedź: $a_1 = 3$.

Liczby całkowite nieparzyste

CZERWIEC 2018 · ZADANIE NR 10 W FILMIE 1:33:08 4 PKT

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2), którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny.
Oblicz wyraz aq tego ciągu.

Na co zwrócić uwagę. Liczby całkowite mogą być ujemne – dodatni pierwszy wyraz trzeba wywnioskować z treści, a nie przyjąć.

Gdyby a było ujemne, ciąg rosnący wymagałby ilorazu z przedziału $(0, 1)$, a taki iloraz nie jest liczbą całkowitą. Zatem $a > 0$, iloraz jest większy od 1, a jako liczba nieparzysta – $q \geq 3$. Największy wyraz to aq^2, więc ciąg $(a, aq, aq^2 - 4)$ jest arytmetyczny, a podwojony środkowy wyraz to suma skrajnych:

$$2aq = a + aq^2 - 4, \qquad 4 = aq^2 - 2aq + a = a\,(q-1)^2\,.$$

Czynnik a to dodatnia liczba nieparzysta, a $(q-1)^2 \geq 4$. Iloczyn równy 4 daje więc tylko $a = 1$ i $(q-1)^2 = 4$, czyli $q = 3$ (rozkład $4 \cdot 1$ wymagałby parzystego a, a $2 \cdot 2$ – kwadratu równego 2). Pytanie dotyczyło aq: odpowiedź $aq = 3$.

Jedno równanie, dwie niewiadome

MAJ 2019 · ZADANIE NR 12 · POZIOM WYKONANIA 33% · W FILMIE 1:39:28 · 6 PKT

Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$$

jest geometryczny.

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

Na co zwrócić uwagę. Wyrazy a, b, c są dodatnie – to rozstrzyga na końcu, który iloraz zostaje.

Ciąg arytmetyczny zapisujemy od środkowego wyrazu: $a = b - r$, $c = b + r$, przy czym $b > 0$ i $b \pm r > 0$. Wtedy $2a + 2b + c = 5b - r$, a ciąg geometryczny to

$$\left(\frac{1}{b-r}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{5b-r}\right).$$

Warunek bycia ciągiem geometrycznym da jedno równanie z dwiema niewiadomymi – coś tu jest podejrzanego. Ale potrzebujemy tylko ilorazu: $q = \frac{2}{3b} \cdot (b - r) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{r}{b}\right)$, czyli wystarczy znać $t = \frac{r}{b}$. Kwadrat środkowego wyrazu to iloczyn skrajnych:

$$\frac{4}{9b^2} = \frac{1}{(b-r)(5b-r)}, \qquad 4\left(5b^2 - 6br + r^2\right) = 9b^2.$$

Dzielimy przez b^2: $4(5 - 6t + t^2) = 9$, czyli $4t^2 - 24t + 11 = 0$. Bez kalkulatora: $\Delta = 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 4^2(36 - 11) = 4^2 \cdot 25$, $\sqrt{\Delta} = 20$, więc $t = \frac{24 \pm 20}{8} = \frac{6 \pm 5}{2}$, czyli $t = \frac{11}{2}$ albo $t = \frac{1}{2}$. Stąd $q = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -3$ albo $q = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Ujemny iloraz odpada: wtedy środkowy wyraz ciągu geometrycznego miałby inny znak niż skrajne, a wszystkie trzy wyrazy są dodatnie. Dla $q = \frac{1}{3}$ z równości $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{r}{b}\right)$ dostajemy $r = \frac{b}{2}$, czyli ciąg $\left(\frac{b}{2}, b, \frac{3b}{2}\right)$ – o wyrazach dodatnich, jak trzeba. Odpowiedź: $q = \frac{1}{3}$.

Rozwiązania równania kwadratowego warto sprawdzić wzorami Viète'a: tu $t_1 t_2 = \frac{11}{4}$ i $t_1 + t_2 = \frac{24}{4} = 6$. W filmie ta kontrola od razu wyłapała pomyłkę w znaku.

Szereg sześcianów

CZERWIEC 2026 · ZADANIE NR 7 W FILMIE 1:57:00 4 PKT

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 14. Suma sześcianów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 392.

Wyznacz wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. Sześciany wyrazów też tworzą szereg geometryczny – o pierwszym wyrazie a_1^3 i ilorazie q^3.

Suma istnieje, więc $|q| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q} = 14$. Sześciany wyrazów, $a_1^3, a_1^3q^3, a_1^3q^6, \ldots$, tworzą ciąg geometryczny o ilorazie q^3, a $|q^3| < 1$, więc i ten szereg jest zbieżny: $\frac{a_1^3}{1-q^3} = 392$. Z pierwszego równania $a_1 = 14\,(1-q)$, a po wstawieniu do drugiego

$$14^3\,(1-q)^3 = 392\left(1-q^3\right).$$

Rozkładamy: $14^3 = 2^3 \cdot 7^3$, $392 = 2^3 \cdot 7^2$, a $1-q^3 = (1-q)\,(1+q+q^2)$, więc $7\,(1-q)^3 = (1-q)\,(1+q+q^2)$. Dzielimy przez $1-q$, które jest różne od zera, bo $|q| < 1$:

$$7\,(1-q)^2 = 1+q+q^2, \qquad 6q^2 - 15q + 6 = 0, \qquad 2q^2 - 5q + 2 = 0.$$

Pierwiastek $q = 2$ łatwo zgadnąć, a iloczyn pierwiastków to 1, więc drugi to $q = \frac{1}{2}$. Warunek $|q| < 1$ zostawia $q = \frac{1}{2}$, a wtedy $a_1 = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7$. Odpowiedź: $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Dzielenie przez $1-q$ trzeba uzasadnić jednym zdaniem: $|q| < 1$, więc $1-q \neq 0$. Za brak takiego komentarza można stracić punkt.

Szereg z parametrem

CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 7 W FILMIE 2:09:19 4 PKT

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} - \frac{54x}{(x-1)^3} + \ldots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$. Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. Suma szeregu istnieje tylko przy $|q| < 1$ – ten warunek odrzuci na końcu jedno z rozwiązań.

Pierwszy wyraz to $2x$, a iloraz – drugi wyraz podzielony przez pierwszy: $q = -\frac{6x}{x-1} : 2x = -\frac{3}{x-1}$. Suma istnieje, gdy $|q| < 1$, czyli $\frac{3}{|x-1|} < 1$, czyli $|x-1| > 3$. Tej nierówności nie trzeba teraz rozwiązywać – sprawdzimy w niej kandydatów na końcu. Suma szeregu:

$$S = \frac{2x}{1 + \frac{3}{x-1}} = \frac{2x\,(x-1)}{x+2}$$

(licznik i mianownik pomnożyliśmy przez $x-1$). Z równania $\frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2}$ dostajemy $4x\,(x-1) = 15\,(x+2)$, czyli $4x^2 - 19x - 30 = 0$. Tu $\Delta = 841$, $\sqrt{\Delta} = 29$, więc $x = \frac{19+29}{8} = 6$ albo $x = \frac{19-29}{8} = -\frac{5}{4}$.

Sprawdzamy warunek: dla $x = 6$ mamy $|x-1| = 5 > 3$ – dobrze. Dla $x = -\frac{5}{4}$ mamy $|x-1| = \frac{9}{4} < 3$ – odpada. Odpowiedź: $x = 6$.

Ciąg arytmetyczny z trzema wyrazami geometrycznymi

MAJ 2026 · ZADANIE NR 6 | POZIOM WYKONANIA 56% | W FILMIE 2:17:34 | 4 PKT

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o skończonej liczbie wyrazów. Liczba wyrazów tego ciągu jest większa od 6. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 1, a ostatni wyraz tego ciągu jest równy (-2025). Drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. Do sumy potrzebna jest liczba wyrazów – pierwszy i ostatni wyraz już znamy.

Ponieważ $a_1 = 1$, mamy $a_2 = 1+r$, $a_3 = 1+2r$ i $a_6 = 1+5r$. Ciąg (a_2, a_3, a_6) jest geometryczny, więc kwadrat środkowego wyrazu to iloczyn skrajnych:

$$(1+2r)^2 = (1+r)(1+5r), \qquad 1+4r+4r^2 = 1+6r+5r^2, \qquad r^2+2r = 0.$$

Stąd $r = 0$ albo $r = -2$. Przy $r = 0$ wszystkie wyrazy byłyby równe 1, a ostatni wyraz to -2025 – to rozwiązanie odpada, co trzeba napisać jednym zdaniem. Zostaje $r = -2$ (wtedy a_2, a_3, a_6 to -1, -3, -9). Liczbę wyrazów daje wzór na wyraz ogólny:

$$1+(n-1)\cdot(-2) = -2025, \qquad 2(n-1) = 2026, \qquad n = 1014.$$

Informacja, że wyrazów jest więcej niż 6, nic tu nie zmienia. Suma wszystkich wyrazów:

$$S_{1014} = \frac{1+(-2025)}{2}\cdot 1014 = -1012 \cdot 1014 = -1\,026\,168.$$

4

Ćwiczenia

1 Ile jest liczb całkowitych od 23 do 141?

2 Ciąg arytmetyczny jest określony wzorem $a_n = 5 - 3n$. Podaj jego pierwszy wyraz i różnicę.

3 Ciąg geometryczny jest określony wzorem $a_n = 3 \cdot 2^{n+1}$. Podaj jego pierwszy wyraz i iloraz.

4 W ciągu arytmetycznym $a_1 = 2$ i $a_{10} = 20$. Oblicz a_{19}.

5 W ciągu arytmetycznym $a_4 + a_6 = 10$. Oblicz sumę dziewięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

6 Ciąg (a_n) jest arytmetyczny i ma różnicę 3. Czy ciąg $a_2, a_4, a_6, \ldots$ jest arytmetyczny? Jeśli tak, podaj jego różnicę.

7 W ciągu geometrycznym $a_2 = 3$ i $a_8 = 12$. Oblicz a_5.

8 Zbadaj monotoniczność ciągu geometrycznego $a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

9 Czy szereg geometryczny $2 + 3 + \frac{9}{2} + \ldots$ ma sumę? Jeśli tak, oblicz ją.

10 Oblicz wskazany wyraz ciągu określonego rekurencyjnie.

a) $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = 3a_n - 1$ dla $n \geq 1$; oblicz a_4.

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \geq 1$; oblicz a_7.

11 Który z ciągów jest arytmetyczny? Jeśli jest, podaj jego różnicę.

a) $a_n = 7 - 4n$

b) $a_n = n^2 + 1$

c) $a_n = \dfrac{n+3}{2}$

12 Wyznacz wzory ogólne wszystkich ciągów spełniających podane warunki.

a) Ciąg jest arytmetyczny, $a_3 = 11$ i $a_{10} = 32$.

b) Ciąg jest geometryczny, $a_2 = 6$ i $a_5 = 162$.

c) Ciąg jest geometryczny, $a_3 = 12$ i $a_5 = 48$.

13 Wyznacz wszystkie wartości x, dla których

a) ciąg $(x-1,\ 2x,\ 4x+3)$ jest arytmetyczny,

b) ciąg $(x,\ x+6,\ 4x)$ jest geometryczny.

14 Oblicz:

a) sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 7,

b) liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego $4, 11, 18, \ldots, 361$,

c) sumę $3+6+12+\ldots+384$, której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego,

d) sumę szeregu geometrycznego $12-6+3-\frac{3}{2}+\ldots$

15 Ciąg $(2, x, 18)$ jest geometryczny i ma wyrazy dodatnie, a ciąg $(x, y, 18)$ jest arytmetyczny. Wyznacz x i y.

16 Ciąg $(x, 6, y)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 4, y)$ – geometryczny. Wyznacz x i y.

17 Ciąg arytmetyczny (a_n) ma pierwszy wyraz $a_1 = 2$ i różnicę $r \neq 0$. Wyrazy a_1, a_2, a_4 w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz r.

18 Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny, a suma jego wyrazów jest równa 15. Ciąg $(a+1, b+3, c+9)$ jest geometryczny. Wyznacz a, b i c.

19 Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i geometryczny, a suma jego wyrazów wynosi -3π. Wyznacz a, b i c.

20 Boki trójkąta prostokątnego o obwodzie 30 tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz pole tego trójkąta.

21 Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n suma $1+3+5+\ldots+(2n+11)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

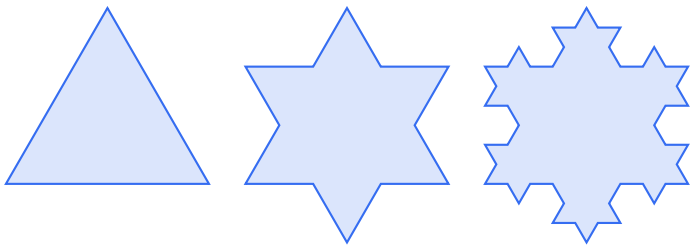
22 Liczby a, b i c tworzą malejący ciąg geometryczny. Suma wyrazów tego ciągu wynosi 155. Ponadto a, b i c są – odpowiednio – trzynastym, trzecim i pierwszym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Wyznacz a, b i c.

23 Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a wszystkie jego wyrazy są liczbami całkowitymi dodatnimi. Suma 10 początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 280. Ponadto $a_1^2 + a_2^2 = 50$. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n).

24 Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n). Jego wyrazy o numerach siódmym, czwartym i trzecim w podanej kolejności są pierwszymi trzema wyrazami ciągu geometrycznego (b_n). Wiadomo, że szereg $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ jest zbieżny i jego suma wynosi $\frac{9}{4}$. Wyznacz a_1.

25 W kwadrat A_1 o boku długości a wpisano koło K_1, w koło K_1 wpisano kwadrat A_2, w kwadrat A_2 wpisano koło K_2 i tak dalej. Ciąg (d_n) jest określony wzorem $d_n = P_{A_n} - P_{K_n}$, gdzie P_{A_n} to pole kwadratu A_n, a P_{K_n} to pole koła K_n $(n \geq 1)$. Wyznacz sumę wszystkich wyrazów ciągu (d_n).

26 ★ Płatek Kocha powstaje w nieskończenie wielu krokach. Zaczynamy od trójkąta równobocznego o boku a (etap 0). W każdym kolejnym kroku z *każdym* odcinkiem brzegu figury postępujemy tak samo: dzielimy go na trzy równe części, na środkowej części budujemy – na zewnątrz figury – trójkąt równoboczny, po czym samą środkową część usuwamy. Trzy pierwsze etapy przedstawia rysunek.



etap 0 etap 1 etap 2

Oblicz pole figury granicznej, czyli pole płatka Kocha.

5

Dodatek

Suma ciągu arytmetycznego – sposób Gaussa

Zapiszmy sumę dwa razy: raz od początku, raz od końca.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

W każdej kolumnie wyraz z lewej strony ciągu i wyraz z prawej dają tę samą sumę $a_1 + a_n$: pierwszy z nich zyskuje tyle różnic r, ile drugi traci. Kolumn jest n, więc $2S_n = n\,(a_1 + a_n)$ i $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$.

Suma ciągu geometrycznego – inny sposób

Pomnóżmy sumę $S_n = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1}$ przez q: $qS_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^n$. W różnicy $S_n - qS_n$ prawie wszystkie składniki się skracają i zostaje $S_n\,(1-q) = a_1 - a_1q^n$. Dla $q \neq 1$ dzielimy przez $1-q$ i dostajemy znany wzór $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

27 ★ Wyznacz wszystkie wartości x, dla których szereg geometryczny $1+(x-2)+(x-2)^2+\ldots$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 4.

28 ★ Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny. Wykaż, że ciąg $(a^2 - bc,\ b^2 - ac,\ c^2 - ab)$ też jest arytmetyczny.

29 ★ Suma szeregu geometrycznego jest równa 9, a suma kwadratów jego wyrazów jest równa 27. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego szeregu.

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Przy każdym zadaniu jest wynik, wskazówka i szkic rozumowania, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 ODP. 119

WSK. Liczb całkowitych od m do k jest $k-m+1$.

SZKIC $141-23+1=119$, a nie $141-23=118$.

2 ODP. $a_1=2$, $r=-3$

WSK. Wstaw $n=1$ i $n=2$.

SZKIC $a_1=5-3=2$, $a_2=-1$, więc $r=a_2-a_1=-3$; liczba 5 nie jest wyrazem tego ciągu.

3 ODP. $a_1=12$, $q=2$

WSK. Wstaw $n=1$ i $n=2$.

SZKIC $a_1=3\cdot 2^2=12$, $a_2=3\cdot 2^3=24$, $q=\frac{24}{12}=2$.

4 ODP. $a_{19}=38$

WSK. a_{10} leży w połowie drogi między a_1 i a_{19}.

SZKIC $a_{10}=\frac{a_1+a_{19}}{2}$, więc $a_{19}=2\cdot 20-2=38$; zgadza się z $r=2$.

5 ODP. $S_9=45$

WSK. Pary jak u Gaussa: $a_1+a_9=a_4+a_6$.

SZKIC $a_1+a_9=2a_1+8r=a_4+a_6=10$, więc $S_9=\frac{a_1+a_9}{2}\cdot 9=45$.

6 ODP. tak, różnica 6

WSK. Między a_2 a a_4 są dwa kroki po 3.

SZKIC $a_{2k+2}-a_{2k}=2r=6$ dla każdego k.

7 ODP. $a_5=6$ albo $a_5=-6$

WSK. $a_5=a_2q^3$, a $q^6=\frac{a_8}{a_2}$.

SZKIC $q^6=4$, więc $q^3=2$ albo $q^3=-2$ i $a_5=3q^3=\pm 6$; oba ciągi spełniają warunki.

8 ODP. ciąg rosnący

WSK. Sprawdź znak pierwszego wyrazu i iloraz.

SZKIC $a_1=-\frac{3}{2}<0$ i $q=\frac{1}{2}$; wyrazy $-\frac{3}{2},-\frac{3}{4},-\frac{3}{8},\ldots$ rosną.

9 ODP. nie ma sumy

WSK. $q=\frac{3}{2}$.

SZKIC $|q|>1$; wzór $\frac{a_1}{1-q}$ dałby -4, czyli liczbę ujemną jako sumę liczb dodatnich.

10 ODP. a) $a_4=41$; b) $a_7=29$

WSK. Licz wyraz po wyrazie.

SZKIC a) $a_2=3\cdot 2-1=5$, $a_3=14$, $a_4=41$; b) każdy wyraz to suma dwóch poprzednich: $1,3,4,7,11,18,29$.

11 ODP. a) tak, $r=-4$; b) nie; c) tak, $r=\frac{1}{2}$

WSK. Szukaj funkcji liniowej zmiennej n.

SZKIC a) $-4n+7$; c) $\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$; b) $a_2-a_1=3$, a $a_3-a_2=5$.

12 ODP. a) $a_n=3n+2$; b) $a_n=2\cdot 3^{n-1}$; c) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ albo $a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

WSK. Odejmij (a) albo podziel (b, c) stronami równania z danymi wyrazami.

SZKIC a) $7r=21$, $r=3$, $a_1=11-6=5$; b) $q^3=27$, $q=3$, $a_1=2$; c) $q^2=4$, więc $q=\pm 2$, w obu przypadkach $a_1=\frac{12}{q^2}=3$.

13 ODP. a) $x=-2$; b) $x=6$ albo $x=-2$

WSK. a) Podwojony środkowy wyraz to suma skrajnych; b) kwadrat środkowego to iloczyn skrajnych.

SZKIC a) $4x=(x-1)+(4x+3)$, ciąg $(-3,-4,-5)$; b) $(x+6)^2=4x^2$, więc $x+6=2x$ albo $x+6=-2x$; ciągi $(6,12,24)$ i $(-2,4,-8)$.

14 ODP. a) 728; b) 52; c) 765; d) 8

WSK. W a)–c) najpierw liczba składników; w d) $q=-\frac{1}{2}$.

SZKIC a) $14,21,\ldots,98$: $98=14+7(n-1)$, $n=13$, $S_{13}=\frac{14+98}{2}\cdot 13=728$; b) $4+7(n-1)=361$, $n-1=51$; c) $3\cdot 2^{n-1}=384$, $n=8$, $S_8=3\cdot\frac{2^8-1}{2-1}=765$; d) $\frac{12}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{12}{\frac{3}{2}}=8$.

15 ODP. $x=6$, $y=12$

WSK. Najpierw ciąg geometryczny.

SZKIC $x^2=2\cdot 18=36$ i $x>0$, więc $x=6$; $y=\frac{6+18}{2}=12$.

16 ODP. $x=6-2\sqrt{5}$, $y=6+2\sqrt{5}$ albo $x=6+2\sqrt{5}$, $y=6-2\sqrt{5}$

WSK. Znasz sumę i iloczyn liczb x i y.

SZKIC $x+y=12$ i $xy=16$, więc x i y to pierwiastki równania $t^2-12t+16=0$, czyli $t=6\pm 2\sqrt{5}$.

17 ODP. $r=2$

WSK. $a_2=2+r$, $a_4=2+3r$.

SZKIC $(2+r)^2=2(2+3r)$, czyli $r^2=2r$; $r\neq 0$, więc $r=2$ i ciąg $(2,4,8)$.

18 ODP. $a=3$, $b=5$, $c=7$ albo $a=15$, $b=5$, $c=-5$

WSK. Zapisz wyrazy jako $5-r$, 5, $5+r$.

SZKIC $3b=15$, więc $b=5$; $8^2=(6-r)(14+r)$, czyli $r^2+8r-20=0$, $r=2$ albo $r=-10$; ciągi geometryczne $(4,8,16)$ i $(16,8,4)$.

19 ODP. $a=b=c=-\pi$

WSK. Pokaż najpierw, że ciąg arytmetyczny i geometryczny jednocześnie musi być stały.

SZKIC Wyrazy ciągu arytmetycznego to $b-r$, b, $b+r$. Ciąg jest też geometryczny, więc $b^2=(b-r)(b+r)=b^2-r^2$, czyli $r=0$ i ciąg jest stały: $a=b=c$. Stąd $3b=-3\pi$ i $a=b=c=-\pi$.

20 ODP. $P=\frac{75}{2}$

WSK. Zapisz boki jako $a-r$, a, $a+r$.

SZKIC Można przyjąć $r>0$ (przy $r=0$ trójkąt byłby równoboczny), więc przeciwprostokątna to $a+r$. Obwód: $3a=30$, $a=10$. Z twierdzenia Pitagorasa $(10-r)^2+10^2=(10+r)^2$, czyli $100=40r$, $r=\frac{5}{2}$; boki $\frac{15}{2}$, 10, $\frac{25}{2}$ i $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 10=\frac{75}{2}$.

21 zadanie na dowód

WSK. Policz najpierw, ile jest składników.

SZKIC Składniki to kolejne liczby nieparzyste $2k-1$; z $2k-1=2n+11$ mamy $k=n+6$, więc składników jest $n+6$, a suma $\frac{1+(2n+11)}{2}\cdot(n+6)=(n+6)^2$.

22 ODP. $a=125$, $b=25$, $c=5$

WSK. W ciągu arytmetycznym $d_{13}-d_1=12r$, a $d_3-d_1=2r$.

SZKIC $a-c=6(b-c)$, czyli $a-6aq+5aq^2=0$ i $5q^2-6q+1=0$: $q=\frac{1}{5}$ albo $q=1$. Ciąg jest malejący, więc $q=\frac{1}{5}$, a $a\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\right)=155$ daje $a=125$.

23 ODP. $a_n=6n-5$

WSK. Liczbę 50 da się zapisać jako sumę dwóch kwadratów liczb dodatnich tylko na

dwa sposoby.

SZKIC $S_{10} = 280$ daje $2a_1 + 9r = 56$. $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$, więc (a_1, a_2) to $(1,7)$, $(5,5)$ albo $(7,1)$; warunek spełnia tylko $(1,7)$, czyli $a_1 = 1$, $r = 6$.

24 ODP. $a_1 = -\frac{1}{2}$

WSK. $(a_1 + 3r)^2 = (a_1 + 6r)(a_1 + 2r)$.

SZKIC Po wymnożeniu $r(2a_1 + 3r) = 0$. Przy $r = 0$ iloraz $q = 1$ i szereg nie jest zbieżny, więc $r = -\frac{2}{3}a_1$: $b_1 = -3a_1$, $b_2 = -a_1$, $q = \frac{1}{3}$, a $\frac{-3a_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}$ daje $a_1 = -\frac{1}{2}$.

25 ODP. $\frac{a^2(4-\pi)}{2}$

WSK. Każdy kolejny kwadrat ma pole dwa razy mniejsze od poprzedniego.

SZKIC Kwadrat wpisany w koło o średnicy a ma przekątną a, więc pole $\frac{a^2}{2}$. Stąd $d_n = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, a suma szeregu $\frac{a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a^2(4-\pi)}{2}$.

26 ODP. $P = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$

WSK. W kroku n-tym dochodzi $3 \cdot 4^{n-1}$ trójkątów o boku $\frac{a}{3^n}$.

SZKIC Przyrosty pola $3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{9^n}$ tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ i ilorazie $\frac{4}{9}$. Ich suma to $\frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, więc $P = \frac{8}{5} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$.

Dodatek

27 ODP. $x = \frac{11}{4}$

WSK. $q = x - 2$ i $|q| < 1$.

SZKIC Zbieżny dla $1 < x < 3$; $\frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x} = 4$ daje $x = \frac{11}{4} \in (1,3)$.

28 zadanie na dowód

WSK. Różnice kolejnych wyrazów rozłóż na czynniki.

SZKIC $(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = (b-a)(a+b+c)$ i $(c^2 - ab) - (b^2 - ac) = (c-b)(a+b+c)$, a $b - a = c - b$.

29 ODP. $a_1 = \frac{9}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

WSK. Kwadraty wyrazów tworzą szereg o ilorazie q^2.

SZKIC $\frac{a_1}{1-q} = 9$ i $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 27$; po podzieleniu $\frac{a_1}{1+q} = 3$, więc $9(1-q) = 3(1+q)$ i $q = \frac{1}{2}$.