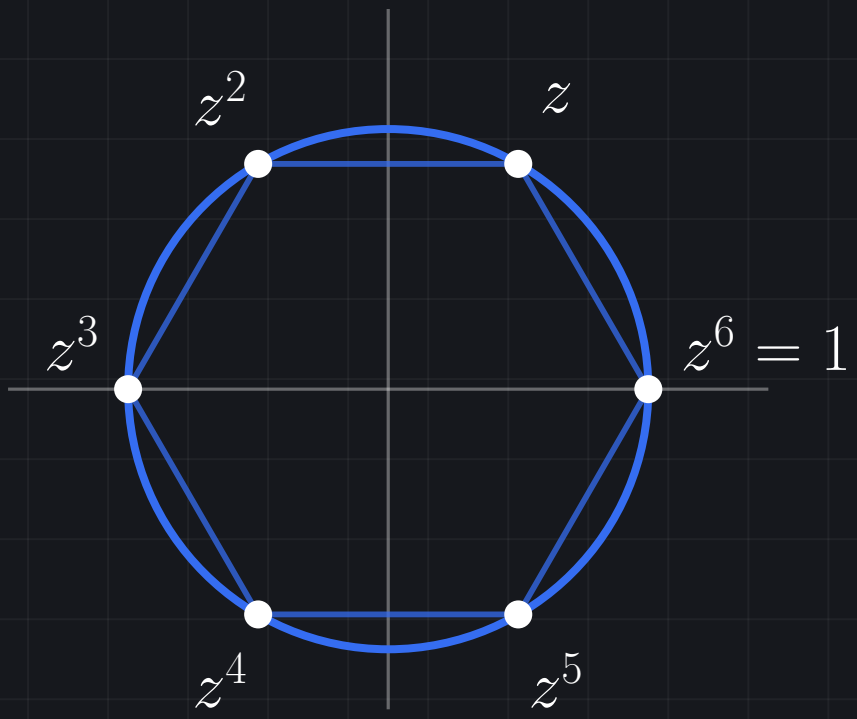


LICZBY ZESPOLONE

Postać trygonometryczna i wzór de Moivre'a

ZAKRES

1. ROK STUDIÓW

02

Tomasz Saweczko · lysyuczymatmy.pl

© 2026 · wszelkie prawa zastrzeżone

TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim**, **Uniwersytecie Warszawskim** i **Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

Zobacz kurs

DODATKOWE MATERIAŁY

- Wszystkie materiały
- Autorskie arkusze próbne
- Krótkie filmy
- Dłuższe filmy

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

Dołącz

Spis treści

1. Postać trygonometryczna **4**

Postać trygonometryczna liczby zespolonej 4

Argument główny 5

Jak zapisać liczbę w postaci trygonometrycznej 6

Zapis podobny do postaci trygonometrycznej 8

Liczby o module 1 8

Kąty z tabelki 9

2. Mnożenie, dzielenie i wzór de Moivre'a **11**

Mnożenie w postaci trygonometrycznej 11

Obrót o kąt 12

Ile wynosi $\cos 15^\circ$ 14

Dzielenie i wzór de Moivre'a 14

Potęgi liczby o module 1 15

Wzory na $\cos 3\alpha$ i $\sin 3\alpha$ 17

3. Ćwiczenia **18**

4. Dodatek **20**

Skąd się bierze wzór na iloraz 20

Wzór de Moivre'a dla każdego n 20

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania **21**

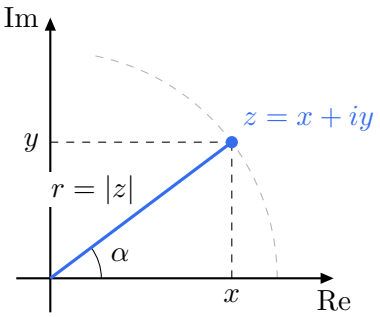
1

Postać trygonometryczna

W pierwszej lekcji liczby zespolone były parami współrzędnych (x, y). Teraz opiszemy je inaczej: odległością od zera i kątem. Tak powstaje postać trygonometryczna – i od niej zaczyna się geometria liczb zespolonych: mnożenie okazuje się obrotem, a potęgowanie sprowadza się do mnożenia kąta przez liczbę. Ten materiał idzie tą samą drogą co film. Każda karta z przykładem ma plakietkę z momentem w filmie.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

W postaci algebraicznej liczbę $z = x + iy$ opisują dwie współrzędne punktu (x, y). Ten sam punkt można opisać inaczej: odległością od początku układu współrzędnych i kątem. Odcinek od punktu $(0, 0)$ do punktu (x, y) to **promień wodzący**. Oznaczmy jego długość przez r, a kąt, jaki tworzy z dodatnią półosią x-ów, przez α.



Z definicji funkcji trygonometrycznych $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ i $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, więc

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha.$$

Para (r, α) wyznacza punkt tak samo jednoznacznie jak para (x, y) – to **współrzędne biegunowe**, znane z analizy matematycznej. W języku liczb zespolonych promień r to moduł $|z|$, a punkt $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ to liczba $r\cos\alpha + i\,r\sin\alpha$. Po wyłączeniu r przed nawias dostajemy nowy zapis liczby z.

POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA LICZBY ZESPOLONEJ

$$z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,,$$

gdzie α to kąt między promieniem wodzącym liczby z a dodatnią półosią x-ów.

W postaci trygonometrycznej przed nawiasem stoi moduł, czyli liczba **dodatnia**, w nawiasie jest **plus**, a pod cosinusem i pod sinusem stoi **ten sam** kąt. Zapis, który łamie choć jeden z tych warunków, nie jest postacią trygonometryczną (karta na stronie 8).

Argument główny

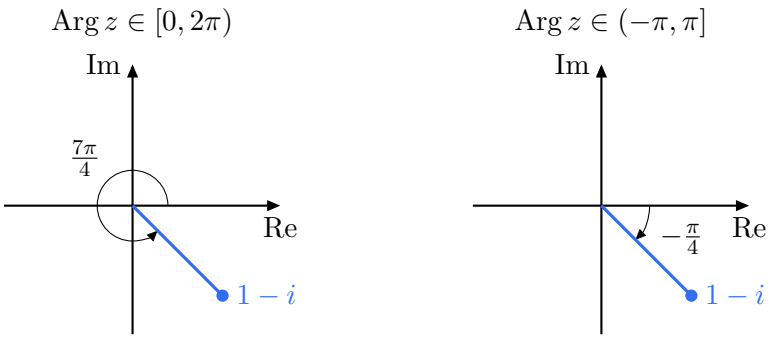
Kąt w postaci trygonometrycznej nie jest wyznaczony jednoznacznie. Kąty mierzone przeciwnie do ruchu wskazówek zegara są dodatnie, a mierzone zgodnie z ruchem wskazówek – ujemne. Do liczby $1-i$ prowadzi więc kąt $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$, ale też kąt $-\frac{\pi}{4}$. Do każdego z nich można dodać pełny obrót 2π: cosinus i sinus mają okres 2π, więc

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \qquad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha.$$

Dlatego wybiera się jeden kąt z ustalonego przedziału.

ARGUMENT GŁÓWNY

Argument główny liczby $z \neq 0$, oznaczany $\operatorname{Arg} z$, to ten kąt jej promienia wodzącego, który leży w ustalonym przedziale – zależnie od konwencji $[0, 2\pi)$ albo $(-\pi, \pi]$. Liczba 0 nie ma argumentu.



Dla $z = 1 - i$ jest więc $\operatorname{Arg} z = \frac{7\pi}{4}$ w pierwszej konwencji i $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$ w drugiej. Wybór konwencji nie zmienia żadnych rachunków – trzeba tylko wiedzieć, której używa się na wykła-

dzie. Druga bywa wygodniejsza: kąt $-\frac{\pi}{4}$ widać od razu z rysunku, a $\frac{7\pi}{4}$ trzeba jeszcze policzyć. W tym materiale argument główny podajemy z przedziału $(-\pi, \pi]$.

Jak zapisać liczbę w postaci trygonometrycznej

Potrzebne są dwie rzeczy: moduł i kąt. Moduł liczymy ze wzoru $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ albo odczytujemy z rysunku. Kąt odczytujemy z trójkąta prostokątnego, który tworzy promień wodzący z osią x-ów, a potem ustalamy jego znak zgodnie z konwencją.

POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 9:32

Zapisz w postaci trygonometrycznej liczbę $z = 1 + i$.

I Liczba $1 + i$ to punkt $(1, 1)$. Promień wodzący jest przekątną kwadratu o boku 1, więc $|z| = \sqrt{2}$, a kąt to $45°$, czyli $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$.

II $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Po wymnożeniu wraca $1 + i$, bo $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$. To ta sama liczba, tylko zapisana inaczej.

KĄT UJEMNY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 12:01

Zapisz w postaci trygonometrycznej liczbę $z = 1 - i$.

I Punkt $(1, -1)$, znów przekątna kwadratu: $|z| = \sqrt{2}$. Kąt idzie zgodnie z ruchem wskazówek zegara, więc $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$.

II $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ – i tak to zostawiamy.

KĄT Z TRÓJKĄTA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 13:47

Zapisz w postaci trygonometrycznej liczbę $z = 1 - i\sqrt{3}$.

I Moduł: $|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$. To samo daje twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta o przyprostokątnych 1 i $\sqrt{3}$.

II Kąt ostry tego trójkąta przy początku układu ma sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc to $60°$, czyli $\frac{\pi}{3}$. Punkt $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ leży pod osią x-ów, więc kąt skierowany jest ujemny: $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3}$.

III $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. W konwencji $[0, 2\pi)$ kąt to $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ i $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ – ta sama liczba, bo $\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$.

Zapis podobny do postaci trygonometrycznej

WZORY REDUKCYJNE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 19:02

Zapisz w postaci trygonometrycznej liczbę $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

I To **nie** jest postać trygonometryczna: przed nawiasem stoi liczba ujemna, a w nawiasie jest minus. Minus wnosimy do nawiasu: $z = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Wciąż źle – tym razem minus stoi przed cosinusem.

II Wzory redukcyjne $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ i $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ dają $-\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3}$ i $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$, więc

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Teraz wszystko się zgadza: $|z| = 2$ i $\operatorname{Arg} z = \frac{2\pi}{3} = 120°$ w obu konwencjach.

III **Bez wzorów redukcyjnych.** Wymnażamy: $z = -2\left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$. To punkt $(-1, \sqrt{3})$, moduł 2. Kąt w trójkącie po lewej stronie osi y-ów ma sinus $\frac{1}{2}$, więc to $30°$, a cały kąt od dodatniej półosi x-ów to $90° + 30° = 120° = \frac{2\pi}{3}$ – ta sama postać.

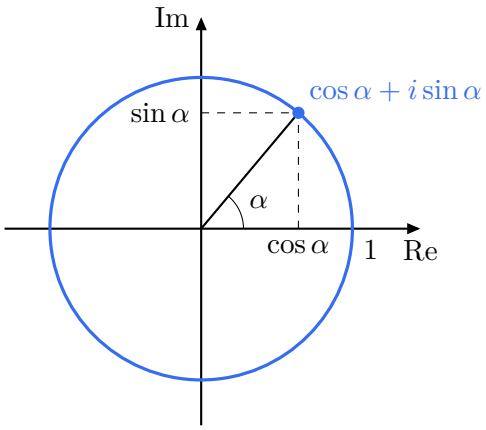
Wzory redukcyjne są szybsze, ale łatwo w nich pomylić znak. Wymnożenie i rysunek trwają dłużej, za to trudniej się na nich pomylić.

Liczby o module 1

Liczba $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ma moduł 1 – z jedynki trygonometrycznej:

$$|\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{1} = 1.$$

Widać to też w samym zapisie: $\cos\alpha + i\sin\alpha = 1\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, a liczba przed nawiasem to moduł. Takie liczby leżą więc na okręgu o środku $(0,0)$ i promieniu 1, a kąt α wskazuje dokładnie jeden punkt tego okręgu. To ten sam obrazek, którym definiuje się sinus i cosinus dowolnego kąta, a nie tylko kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.



LICZBY O MODULE 1

$$|\cos\alpha + i\sin\alpha| = 1.$$

Każda liczba zespolona o module 1 ma postać $\cos\alpha + i\sin\alpha$.

Kąty z tabelki

Nie każdą liczbę wygodnie zapisać w postaci trygonometrycznej. Dla $z = 1 + 3i$ kąt α spełnia $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{1} = 3$, a to nie jest żadna wartość z tabelki – potrzebna byłaby funkcja arcus tangens. Na kolokwiach takich liczb zwykle się nie daje: wystarczy kłopotu ze znakami i ćwiartkami przy kątach z tabelki. Te kąty trzeba jednak znać na pamięć.

	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Jak to zapamiętać. W mianownikach sinusa i cosinusa wszędzie stoi 2. W licznikach sinusa idą po kolei $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, a w licznikach cosinusa – w odwrotnej kolejności (oczywiście $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$). Tangens kąta 45° to 1, bo trójkąt prostokątny jest wtedy równoramienny. Tangens jest rosnący na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, więc dla 30° ma mniejszą z dwóch pozostałych wartości, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, a dla 60° – większą, $\sqrt{3}$. Cotangens idzie na odwrót.

2

Mnożenie, dzielenie i wzór de Moivre'a

W postaci trygonometrycznej mnożenie jest proste: moduły się mnożą, a kąty dodają. Z tej jednej reguły wynika obrót punktu o dowolny kąt, dzielenie, wzór de Moivre'a na potęgę liczby zespolonej i wzory na sinus i cosinus wielokrotności kąta.

Mnożenie w postaci trygonometrycznej

Pomnóżmy dwie liczby o module 1. Części rzeczywista i urojona iloczynu to znane ze szkoły wzory:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\left(\underbrace{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}_{\sin(\alpha+\beta)}\right).$$

Iloczyn to znów liczba o module 1, a jej kąt to $\alpha+\beta$: **przy mnożeniu kąty się dodają**. Gdy moduły są dowolne, wystarczy dołożyć wzór $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ z pierwszej lekcji.

MNOŻENIE W POSTACI TRYGONOMETRYCZNEJ

Jeśli $z_1 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$, to

$$z_1 z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\left(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)\right).$$

Moduły się mnożą, a kąty się dodają.

MNOŻENIE PRZEZ i

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 35:44

Dlaczego mnożenie przez i to obrót o $90°$ wokół początku układu współrzędnych?

I Liczba i to punkt $(0,1)$: moduł 1, kąt $90°$, czyli $i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

II Jeśli $z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, to

$$iz = |z|\left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Moduł się nie zmienia, bo $|i| = 1$, a kąt rośnie o $\frac{\pi}{2}$ – to właśnie obrót o $90°$.

Obrót o kąt

OBRÓT

Pomnożenie liczby z przez $\cos\alpha + i\sin\alpha$ obraca ją wokół początku układu współrzędnych o kąt α przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Moduł liczby $\cos\alpha + i\sin\alpha$ to 1, więc długość wektora się nie zmienia, a do jego kąta dochodzi α. Tak samo działają potęgi i z pierwszej lekcji: każde mnożenie przez i to obrót o $90°$, więc i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ krążą po okręgu jednostkowym.

OBRÓT PUNKTU

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 38:26

Punkt $(3, 1)$ obrócono wokół początku układu współrzędnych o $30°$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wyznacz współrzędne obrazu.

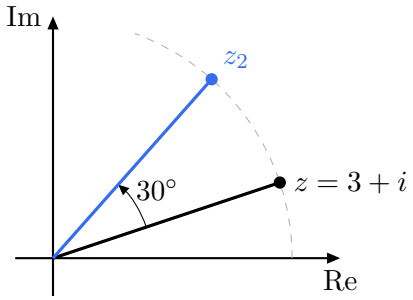
I Liczby $3 + i$ nie da się wygodnie zapisać w postaci trygonometrycznej, ale nie jest to potrzebne. Wystarczy pomnożyć ją przez liczbę o module 1 i kącie $30°$:

$$\cos 30° + i \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right).$$

II Mnożymy w postaci algebraicznej:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)(3 + i) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3} + 3\right) i\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 3}{2}\, i.$$

III Obraz to punkt $\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$. Szkolnymi metodami geometrii analitycznej trzeba by szukać prostej nachylonej pod kątem $30°$ ze wzoru na tangens różnicy kątów – tu wystarczyło jedno mnożenie.



Ile wynosi $\cos 15^\circ$

KĄTY SIĘ DODAJĄ

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 44:42

Oblicz $\cos 15^\circ$ i $\sin 15^\circ$, mnożąc liczby $1+i$ oraz $\sqrt{3}-i$.

I Liczba $1+i$ ma moduł $\sqrt{2}$ i kąt 45°. Liczba $\sqrt{3}-i$ to punkt $\left(\sqrt{3},-1\right)$: moduł 2, a kąt ostry w trójkącie ma sinus $\frac{1}{2}$, więc to 30°, a kąt skierowany to -30°. Kąt iloczynu: $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

II Iloczyn w postaci algebraicznej: $(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right) = \left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i$. Jego moduł to $\sqrt{2}\cdot 2 = 2\sqrt{2}$, więc wyłączamy go przed nawias:

$$(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right).$$

III W nawiasie stoi $\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ$, więc

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Szybciej jest przeskalować obie liczby do modułu 1 jeszcze przed mnożeniem: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ i $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$. Iloczyn liczb o module 1 ma moduł 1, więc od razu ma postać $\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ$ i nie trzeba niczego wyłączać przed nawias.

Dzielenie i wzór de Moivre'a

Dzielenie działa jak mnożenie, tylko na odwrót.

DZIELENIE W POSTACI TRYGONOMETRYCZNEJ

Jeśli z_1 ma kąt α, a $z_2 \neq 0$ ma kąt β, to

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right).$$

Moduły się dzielą, a kąty się odejmują.

Przy mnożeniu i dzieleniu nie trzeba pilnować, czy kąt jest argumentem głównym: wynik to wciąż poprawny zapis tej samej liczby. Na argument główny zamieniamy go dopiero wtedy, gdy

jest potrzebny.

Potęga to wielokrotne mnożenie. Dla $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ mamy $z^2 = z \cdot z$, więc moduły się mnożą, a kąty dodają: $z^2 = |z|^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$. Tak samo $z^3 = |z|^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$ i tak dalej (dowód w dodatku, strona 20).

WZÓR DE MOIVRE'A

$$(|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Moduł podnosimy do potęgi n, a kąt mnożymy przez n.

WZÓR DE MOIVRE'A

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 55:04

Oblicz $\left(i\sqrt{3} - 1\right)^{33}$.

I Najpierw postać algebraiczna w zwykłej kolejności: $i\sqrt{3} - 1 = -1 + i\sqrt{3}$. To punkt $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, a nie $\left(\sqrt{3}, -1\right)$ – część rzeczywista to -1.

II Moduł to 2. Kąt w trójkącie przy osi y-ów ma sinus $\frac{1}{2}$, więc to $\frac{\pi}{6}$, a cały kąt to $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$. Zatem $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

III Ze wzoru de Moivre'a:

$$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{33} = 2^{33}(\cos 22\pi + i\sin 22\pi).$$

Sinus zeruje się w całkowitych wielokrotnościach π, a cosinus ma okres 2π, więc $\cos 22\pi = \cos 0 = 1$. Wynik: 2^{33}.

Potęgi liczby o module 1

Dla liczby o module 1 wzór de Moivre'a ma szczególnie prostą postać:

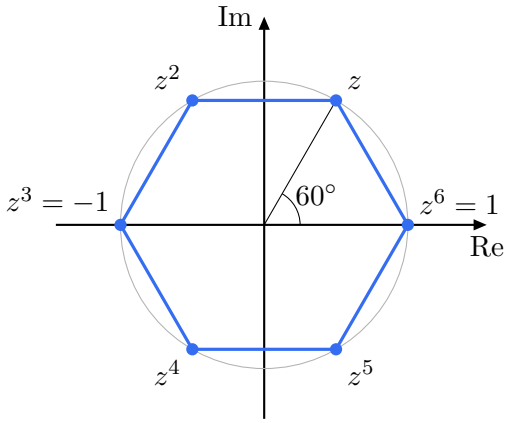
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

SZEŚCIOKĄT

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 59:21

Zaznacz na płaszczyźnie kolejne potęgi liczby $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

I Liczba z ma moduł 1 i kąt 60°. Każde kolejne mnożenie przez z nie zmienia modułu, a kąt zwiększa o 60°. Punkty z, z^2, …, z^6 leżą więc na okręgu jednostkowym co 60°: $z^3 = -1$, $z^6 = 1$, a razem tworzą sześciokąt foremny.



To nie przypadek: wierzchołki tego sześciokąta to **pierwiastki szóstego stopnia z jedynki**. Pierwiastkami zespolonymi zajmiemy się w następnej lekcji.

Wzory na $\cos 3\alpha$ **i** $\sin 3\alpha$

TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 1:01:46

Wyprowadź wzory na $\cos 3\alpha$ i $\sin 3\alpha$.

I Ze wzoru de Moivre'a $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$.

II Tę samą potęgę liczymy ze wzoru na $(a+b)^3$, pamiętając, że $i^2 = -1$ i $i^3 = -i$:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha.$$

III Dwie równe liczby zespolone mają równe części rzeczywiste i równe części urojone, więc

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha, \qquad \sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

W ten sam sposób dostaje się wzory na $\cos 4\alpha$, $\sin 5\alpha$ i każdą następną wielokrotność kąta (ćwiczenie 16).

3

Ćwiczenia

1 Promień wodzący punktu ma długość 4 i tworzy z dodatnią półosią x-ów kąt $\frac{2\pi}{3}$. Podaj współrzędne tego punktu i odpowiadającą mu liczbę zespoloną.

2 Podaj argument główny liczby w obu konwencjach, $[0, 2\pi)$ i $(-\pi, \pi]$:

a) $-i$, **b)** $-1-i$, **c)** $\sqrt{3}-i$, **d)** -1.

3 Zapisz w postaci trygonometrycznej liczbę

a) $2+2i$, **b)** $-3i$, **c)** $-\sqrt{3}+i$, **d)** 5.

4 Zapisz w postaci algebraicznej liczbę

a) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, **b)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, **c)** $6\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

5 Każdy z zapisów tylko przypomina postać trygonometryczną. Wskaż, co się w nim nie zgadza, i zapisz tę liczbę w postaci trygonometrycznej.

a) $3\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$,

b) $-2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

c) $4\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

6 Dane są liczby $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ i $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. Oblicz $z_1 z_2$ i $\frac{z_1}{z_2}$ i zapisz wyniki w postaci algebraicznej.

7 Punkt $(2, 4)$ obrócono wokół początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne obrazu, jeśli obrót był

a) o $90°$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

b) o $90°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara,

c) o $45°$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

lysyuczymatmy.pl

8 Oblicz iloczyn $(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$ na dwa sposoby: w postaci algebraicznej i w postaci trygonometrycznej. Wywnioskuj z tego wartości $\cos 105^\circ$ i $\sin 105^\circ$.

9 Zapisz w postaci trygonometrycznej iloraz $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$, nie wykonując dzielenia.

10 Korzystając ze wzoru de Moivre'a, oblicz:

a) $(1+i)^{10}$, **b)** $\left(\sqrt{3}+i\right)^{6}$, **c)** $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{9}$.

11 Oblicz $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$.

12 Dla jakich liczb naturalnych $n \geq 1$ liczba $\left(\sqrt{3}+i\right)^{n}$ jest

a) rzeczywista, **b)** rzeczywista i dodatnia?

13 Niech $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Oblicz z^2, z^4 i z^8. Ile różnych liczb jest wśród z, z^2, z^3, …, z^{100}?

14 Korzystając ze wzoru de Moivre'a dla $n=2$, wyprowadź wzory na $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$.

15 Wzór $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$ z lekcji zapisz tak, żeby po prawej stronie występował tylko $\cos\alpha$.

4

Dodatek

Skąd się bierze wzór na iloraz

Niech $w = \frac{z_1}{z_2}$, gdzie $z_2 \neq 0$, i niech w ma kąt γ. Wtedy $z_1 = w \cdot z_2$, więc z reguły mnożenia

$$|z_1| = |w| \cdot |z_2|\,, \qquad \alpha = \gamma + \beta$$

(kąty z dokładnością do wielokrotności 2π). Stąd $|w| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ i $\gamma = \alpha - \beta$ – moduły się dzielą, a kąty odejmują.

Wzór de Moivre'a dla każdego n

Film pokazuje przypadki $n = 2$ i $n = 3$. Dla dowolnego n wystarczy indukcja matematyczna. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty. Jeśli $z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$, to z reguły mnożenia

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = |z|^n \cdot |z| \left(\cos\left(n\alpha + \alpha\right) + i \sin\left(n\alpha + \alpha\right)\right) = |z|^{n+1} \left(\cos\left(n+1\right)\alpha + i \sin\left(n+1\right)\alpha\right),$$

czyli wzór zachodzi też dla $n + 1$.

16 ★ Korzystając ze wzoru de Moivre'a, wyprowadź wzory na $\cos 4\alpha$ i $\sin 4\alpha$.

17 ★ Punkty $A = (1, 0)$ i $B = (3, 2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołka C (są dwie możliwości).

18 ★ Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Przy każdym zadaniu jest wynik, wskazówka i szkic rozumowania, bez pełnych rachunków. Argument główny podajemy z przedziału $(-\pi, \pi]$.

Ćwiczenia

1 ODP. $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$, czyli $-2 + 2\sqrt{3}\,i$

WSK. $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$.

SZKIC $x = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$, $y = 4\sin\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 ODP. a) $\frac{3\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{5\pi}{4}$ i $-\frac{3\pi}{4}$; c) $\frac{11\pi}{6}$ i $-\frac{\pi}{6}$; d) π i π

WSK. Narysuj punkt; kąt ujemny to kąt dodatni minus 2π.

SZKIC b) punkt $(-1,-1)$, kąt ostry $\frac{\pi}{4}$ w trzeciej ćwiartce: $\pi + \frac{\pi}{4}$; c) punkt $\left(\sqrt{3}, -1\right)$, kąt ostry $\frac{\pi}{6}$ pod osią; d) liczba -1 leży na ujemnej półosi, a π należy do obu przedziałów.

3 ODP. a) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; b) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; c) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; d) $5\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

WSK. Moduł ze wzoru $\sqrt{x^2+y^2}$, kąt z rysunku.

SZKIC a) $|z| = \sqrt{8}$; c) punkt $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$, kąt ostry $\frac{\pi}{6}$ przy ujemnej półosi, więc $\pi - \frac{\pi}{6}$.

4 ODP. a) $2\sqrt{3} + 2i$; b) $-1 + i$; c) $-3 - 3\sqrt{3}\,i$

WSK. Podstaw wartości z tabelki i wymnóż.

SZKIC b) $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5 ODP. a) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$; b) $2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$; c) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

WSK. a) minus w nawiasie; b) ujemna liczba przed nawiasem; c) sinus i cosinus zamienione miejscami.

SZKIC a) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; b) $-(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos(\alpha+\pi) + i\sin(\alpha+\pi)$, a $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ to po odjęciu 2π kąt $-\frac{3\pi}{4}$; c) $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$ i $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3}$.

6 ODP. $z_1 z_2 = 12i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i$

WSK. Moduły mnożysz albo dzielisz, kąty dodajesz albo odejmujesz.

SZKIC $z_1 z_2 = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

7 ODP. a) $(-4, 2)$; b) $(4, -2)$; c) $\left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$

WSK. Pomnóż $2 + 4i$ przez $\cos\alpha + i\sin\alpha$.

SZKIC a) $i(2+4i) = -4 + 2i$; b) $-i(2+4i) = 4 - 2i$; c) $(2+4i)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-2+6i)$.

8 ODP. $\cos 105^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\sin 105^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

WSK. Kąty 45° i 60° się dodają, moduły $\sqrt{2}$ i 2 mnożą.

SZKIC Algebraicznie $\left(1-\sqrt{3}\right) + \left(1+\sqrt{3}\right)i$; trygonometrycznie $2\sqrt{2}\left(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ\right)$; porównaj części.

9 ODP. $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

WSK. Moduły 2 i $\sqrt{2}$, kąty $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{4}$.

SZKIC $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$.

10 ODP. a) $32i$; b) -64; c) -512

WSK. Najpierw postać trygonometryczna podstawy.

SZKIC a) $\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$; b) $2^6\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$; c)

$2^9\left(\cos\left(-3\pi\right)+i\sin\left(-3\pi\right)\right)$.

11 ODP. -64

WSK. Iloraz w postaci trygonometrycznej, potem wzór de Moivre'a.

SZKIC $1+i\sqrt{3}$: moduł 2, kąt $\frac{\pi}{3}$; $1-i$: moduł $\sqrt{2}$, kąt $-\frac{\pi}{4}$. Iloraz: moduł $\sqrt{2}$, kąt $\frac{7\pi}{12}$; potęga: $\left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos 7\pi+i\sin 7\pi\right)=64\cdot(-1)$.

12 ODP. a) gdy 6 dzieli n; b) gdy 12 dzieli n

WSK. $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

SZKIC $\left(\sqrt{3}+i\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$; liczba jest rzeczywista, gdy $\sin\frac{n\pi}{6}=0$, a dodatnia, gdy ponadto $\cos\frac{n\pi}{6}=1$.

13 ODP. $z^2=i$, $z^4=-1$, $z^8=1$; różnych liczb jest 8

WSK. Każde mnożenie przez z to obrót o $45°$.

SZKIC z^k ma kąt $\frac{k\pi}{4}$; od $z^9=z^8\cdot z=z$ potęgi się powtarzają, a z, …, z^8 to osiem różnych punktów okręgu.

14 ODP. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

WSK. $\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)^2=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$.

SZKIC Lewa strona to $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha$; porównaj części rzeczywiste i urojone.

15 ODP. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

WSK. Jedynka trygonometryczna: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$.

SZKIC $\cos^3\alpha-3\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

Dodatek

16 ODP. $\cos 4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$, $\sin 4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha$

WSK. Rozwiń $\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)^4$ ze wzoru dwumianowego.

SZKIC Współczynniki $1,4,6,4,1$ i potęgi i: $1,i,-1,-i,1$; części rzeczywiste i urojone obu stron muszą być równe.

17 ODP. $C=\left(2-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right)$ albo $C=\left(2+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)$

WSK. Obróć wektor $\overrightarrow{AB}$ wokół A o $60°$ w jedną i w drugą stronę.

SZKIC $B-A=2+2i$; $C=A+(2+2i)\left(\cos 60°\pm i\sin 60°\right)=1+(1+i)\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$.

18 zadanie na dowód

WSK. $1\pm i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

SZKIC Ze wzoru de Moivre'a $(1\pm i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}\pm i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$; po dodaniu sinusy się redukują, a cosinusy dają $2\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$.