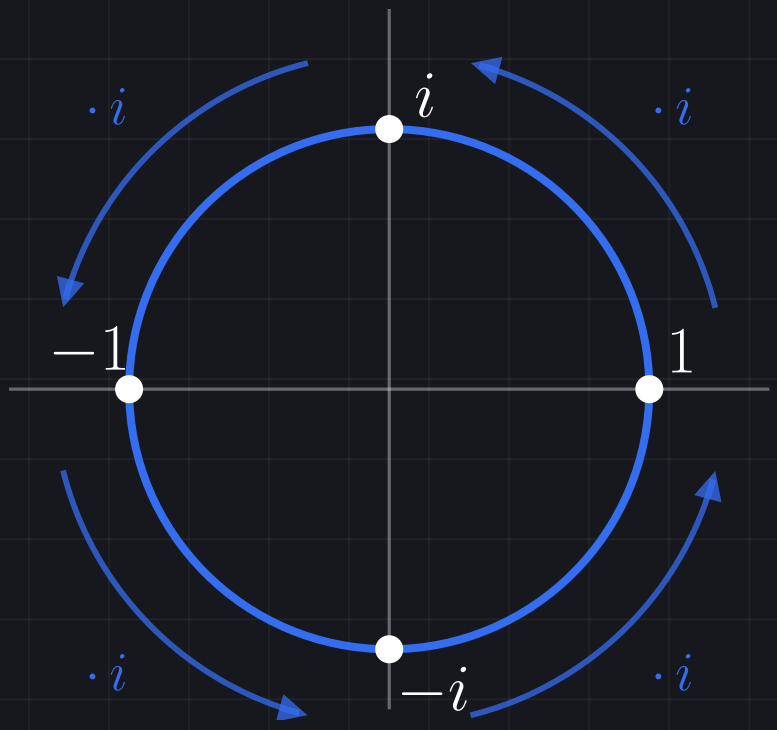


LICZBY ZESPOLONE

Postać algebraiczna, moduł i równania

ZAKRES

1. ROK STUDIÓW

01

Tomasz Saweczko · lysyuczymatmy.pl

© 2026 · wszelkie prawa zastrzeżone

TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim**, **Uniwersytecie Warszawskim** i **Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

Zobacz kurs

DODATKOWE MATERIAŁY

- Wszystkie materiały
- Autorskie arkusze próbne
- Krótkie filmy
- Dłuższe filmy

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

Dołącz

Spis treści

1. Postać algebraiczna i działania **4**

Jednostka urojona i postać algebraiczna 4

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie 5

Dzielenie i sprzężenie 6

Potęgi jednostki urojonej i obrót o 90° 8

Moduł liczby zespolonej 9

Potęgowanie i rozkład na czynniki 11

Własności modułu i sprzężenia 12

2. Równania z liczbami zespolonymi **13**

Metoda $z = x + iy$ 13

Równanie kwadratowe z ujemną deltą 15

Pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej 15

3. Ćwiczenia **17**

4. Dodatek **19**

Dlaczego nie piszemy $i = \sqrt{-1}$ 19

Skąd się bierze $|zw| = |z| \cdot |w|$ 19

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania **20**

1

Postać algebraiczna i działania

Na pierwszym roku studiów liczby zespolone to często pierwszy temat i pierwsze kolokwium. W postaci algebraicznej liczy się na nich prawie tak samo jak w szkole – trzeba tylko pamiętać, że $i^2 = -1$. Ten materiał idzie tą samą drogą co film: najpierw postać algebraiczna i działania, potem moduł i sprzężenie, na końcu równania. Każda karta z przykładem ma plakietkę z momentem w filmie.

Jednostka urojona i postać algebraiczna

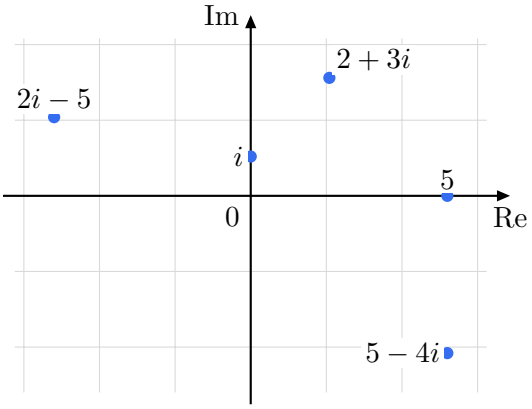
Zbiór liczb zespolonych oznaczamy literą $\mathbb{C}$ – od angielskiej nazwy *complex numbers*. Angielska nazwa mówi więcej niż polska: liczby zespolone są *złożone* z dwóch kawałków. Czasem nazywa się je też liczbami urojonymi, choć nic urojonego w nich nie ma.
Wszystko zaczyna się od **jednostki urojonej**: liczby i, która podniesiona do kwadratu daje -1.

JEDNOSTKA UROJONA

$$i^2 = -1.$$

Liczba i **nie** jest pierwiastkiem z -1, choć taki zapis można spotkać nawet w tytułach poważnych książek. Pierwiastek w liczbach zespolonych to zbiór: pierwiastek drugiego stopnia to zbiór dwóch liczb, pierwiastek trzeciego stopnia – trzech liczb i tak dalej.

Przykłady liczb zespolonych to $2+3i$ i $5-4i$, ale też $i = 0+1\cdot i$ oraz $5 = 5+0\cdot i$. Każda z nich składa się z dwóch kawałków: liczby wolnej od i i liczby stojącej przy i. Dwie liczby kojarzą się z dwiema współrzędnymi punktu – i właśnie tak można o liczbach zespolonych myśleć. Liczbie $a+bi$ odpowiada punkt (a, b) na płaszczyźnie zespolonej, nazywanej też **płaszczyzną Gaussa**: liczbie i – punkt $(0, 1)$, liczbie 5 – punkt $(5, 0)$.



POSTAĆ ALGEBRAICZNA LICZBY ZESPOLONEJ

$$z = a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Liczba a to **część rzeczywista** liczby z, $\operatorname{Re} z = a$ (od angielskiego *real*), a liczba b – **część urojona**, $\operatorname{Im} z = b$ (od *imaginary*).

Zamiast a i b często piszemy x i y, żeby lepiej kojarzyło się to ze współrzędnymi punktu. Same liczby zespolone oznacza się zwykle literami z i w.

PUNKT NA PŁASZCZYŹNIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 3:14

Jakiemu punktowi płaszczyzny odpowiada liczba $2i - 5$?

I Odruchowo chce się odpowiedzieć $(2, -5)$ – i to błąd. Najpierw zapisujemy liczbę w kolejności $a + bi$: $2i - 5 = -5 + 2i$.

II Część rzeczywista to -5, a urojona to 2, więc liczba $2i - 5$ odpowiada punktowi $(-5, 2)$.

Część urojona to liczba stojąca przy i, ale **bez** i: $\operatorname{Im}(5 + 3i) = 3$, a nie $3i$. Część rzeczywista tej liczby to $\operatorname{Re}(5 + 3i) = 5$.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie

Na liczbach zespolonych liczymy jak na wyrażeniach algebraicznych ze szkoły: i traktujemy jak zmienną x. Dochodzi tylko jedna reguła – gdy pojawi się i^2, zamieniamy je na -1.

DODAWANIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 5:57

Oblicz $(2+3i)+(5-8i)$.

I To jak szkolne ćwiczenie $2+3x+5-8x$: porządkujemy wyrazy podobne.

II $2+5=7$ oraz $3i-8i=-5i$, więc wynik to $7-5i$. Odejmowanie wygląda tak samo.

MNOŻENIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 6:48

Oblicz $(2+3i)(5-8i)$.

I Mnożymy jak dwa nawiasy, wszystko przez wszystko: $10-16i+15i-24i^2$.

II $-24i^2=-24\cdot(-1)=24$, więc część rzeczywista to $10+24=34$, a $-16i+15i=-i$. Wynik to $34-i$.

Dzielenie i sprzężenie

Dzielenie jest trochę trudniejsze, ale też znacie je ze szkoły – to uwymiernianie mianownika. Ułamek $\frac{1}{5-\sqrt{2}}$ rozszerzamy przez $5+\sqrt{2}$, bo wtedy w mianowniku powstaje różnica kwadratów: $\left(5-\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{2}\right)=5^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=23$. Z ilorazu dwóch liczb zespolonych chcemy dostać liczbę zespoloną w postaci $a+bi$ i robimy dokładnie to samo.

DZIELENIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 8:05

Oblicz $\dfrac{2+i}{5-i}$.

I Rozszerzamy ułamek przez $5+i$. W mianowniku: $(5-i)(5+i) = 5^2 - i^2 = 25+1 = 26$.

II W liczniku: $(2+i)(5+i) = 10 + 2i + 5i + i^2 = 9 + 7i$.

III Tak jak $\frac{2+5}{3} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}$, rozbijamy ułamek: $\dfrac{9+7i}{26} = \dfrac{9}{26} + \dfrac{7}{26}\,i$. Wynik wyszedł brzydki, choć liczby były proste – tak się zdarza.

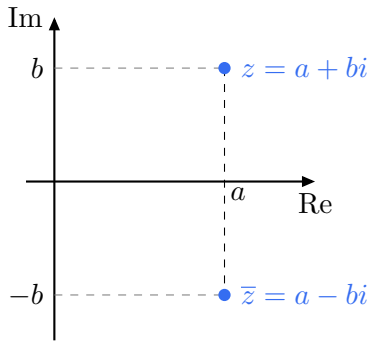
Liczba $5+i$, przez którą rozszerzyliśmy ułamek, to **sprzężenie** mianownika $5-i$: zmieniamy znak liczby stojącej przy i. Liczba $5-i$ to $5+(-1)\cdot i$, więc jej sprzężenie to $5+1\cdot i$.

SPRZĘŻENIE LICZBY ZESPOLONEJ

$$z = a + bi \quad \Longrightarrow \quad \overline{z} = a - bi.$$

W literaturze anglojęzycznej sprzężenie oznacza się też gwiazdką: z^*.

Geometrycznie sprzężenie to odbicie symetryczne względem osi poziomej: punkt (a, b) przechodzi na $(a, -b)$, czyli na drugą stronę osi.



Dzielenie liczb zespolonych to więc **rozszerzenie ułamka przez sprzężenie mianownika**.

Potęgi jednostki urojonej i obrót o $90°$

POTĘGI JEDNOSTKI UROJONEJ

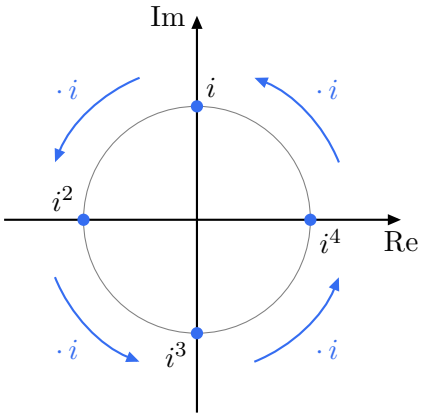
PRZYKŁAD Z LEKCJI · 13:43

Oblicz kolejne potęgi liczby i.

I $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = -i \cdot i = -i^2 = 1$.

II Każda następna potęga to poprzednia razy i: $i^5 = i$, $i^6 = -1$ i tak dalej. Wartości powtarzają się co cztery potęgi.

Zaznaczmy te potęgi na płaszczyźnie: i to punkt $(0, 1)$, $i^2 = -1$ to $(-1, 0)$, $i^3 = -i$ to $(0, -1)$, a $i^4 = 1$ to $(1, 0)$. Każde kolejne mnożenie przez i obraca wektor o $90°$.



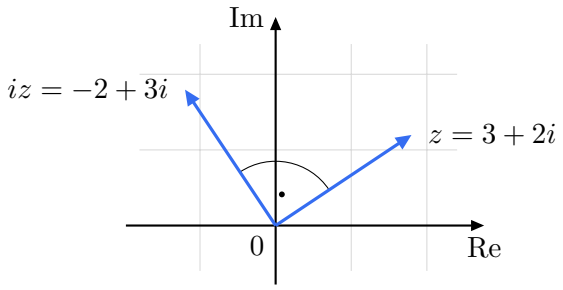
OBRÓT O 90°

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 15:40

Pomnóż liczbę $z = 3 + 2i$ przez i i zaznacz obie liczby na płaszczyźnie.

I $i\,(3 + 2i) = 3i + 2i^2 = 3i - 2 = -2 + 3i$. Uwaga na kolejność: to punkt $(-2, 3)$, a nie $(3, -2)$.

II Wektory prowadzące do z i do iz są prostopadłe i mają tę samą długość: mnożenie przez i to obrót o 90°.



Później okaże się, że mnożąc dwie liczby zespolone, można obracać o dowolny kąt – za liczbami zespolonymi kryje się dużo geometrii.

Moduł liczby zespolonej

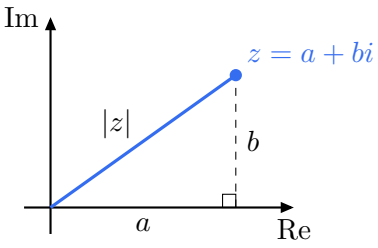
LICZBA RAZY SPRZĘŻENIE

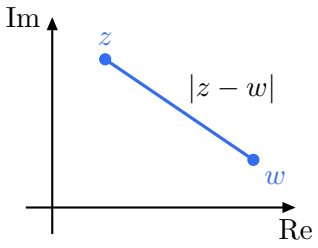
PRZYKŁAD Z LEKCJI · 17:33

Oblicz $z \cdot \overline{z}$ dla $z = a + bi$.

I To wzór na różnicę kwadratów: $(a + bi)\,(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

Liczba $a + bi$ to punkt (a, b), czyli wektor od początku układu współrzędnych do tego punktu. Z twierdzenia Pitagorasa jego długość to $\sqrt{a^2 + b^2}$ – prawie to, co wyszło w karcie. Tę długość nazywamy **modułem** liczby zespolonej. Nazwa nie jest przypadkowa: w szkole $|x|$ to odległość liczby x od zera na osi, a $|z|$ to odległość liczby z od zera, czyli od punktu $(0, 0)$, bo $0 = 0 + 0i$.





MODUŁ LICZBY ZESPOLONEJ

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad z \cdot \overline{z} = |z|^2 .$$

Ten wzór dostaliśmy wyłącznie ze szkolnych wzorów – na razie w liczbach zespolonych nie ma się czego bać.

ODLEGŁOŚĆ

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 21:05

Jak obliczyć odległość między liczbami zespolonymi z i w?

I Na osi liczbowej odległość to moduł różnicy: między 2 i 5 jest $|2 - 5| = 3$. Moduł daje wynik dodatni bez względu na kolejność odejmowania.

II W liczbach zespolonych jest tak samo: odległość to $|z - w|$. Dla $z = x_A + y_A i$ i $w = x_B + y_B i$ mamy $z - w = (x_A - x_B) + (y_A - y_B)\, i$, więc

$$|z - w| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

To szkolny wzór na odległość punktów A i B, tylko zapisany o wiele krócej.

OKRĄG

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 25:15

Jaki zbiór tworzą liczby zespolone spełniające równanie $|z| = 1$?

I To liczby oddalone od zera dokładnie o 1, czyli okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1. W szkolnym zapisie to $x^2 + y^2 = 1$, tu – jeden krótki moduł.

Potęgowanie i rozkład na czynniki

DUŻA POTĘGA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 26:05

Oblicz $(1 + i)^{2026}$.

I Zaczynamy od kwadratu. Szkolny wzór skróconego mnożenia działa i tutaj: $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

II $(1 + i)^{2026} = \left((1 + i)^2\right)^{1013} = (2i)^{1013} = 2^{1013} \cdot i^{1013}$.

III Potęgi i powtarzają się co cztery, więc liczy się tylko reszta z dzielenia wykładnika przez 4: 1012 dzieli się przez 4, czyli $i^{1013} = (i^4)^{253} \cdot i = i$. Wynik: $(1 + i)^{2026} = 2^{1013}\, i$.

ROZKŁAD NA CZYNNIKI

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 29:31

Rozłóż wyrażenie $z^2 + 1$ na czynniki.

I W liczbach rzeczywistych $x^2 + 1$ nie ma pierwiastków i nie rozkłada się na czynniki.

II W liczbach zespolonych $-1 = i^2$, więc $z^2 + 1 = z^2 - (-1) = z^2 - i^2 = (z - i)\,(z + i)$.

W liczbach zespolonych wielomiany zawsze dają się tak rozłożyć do końca – do tego jeszcze wrócimy.

Własności modułu i sprzężenia

Moduł zachowuje się tak samo jak wartość bezwzględna w szkole.

MODUŁ ILOCZYNU I ILORAZU

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \text{dla } w \neq 0.$$

W szczególności $|z^n| = |z|^n$.

MODUŁ ILORAZU

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 31:16

Oblicz $\left|\dfrac{2+i}{5-i}\right|$.

I Moduł liczymy z postaci $a+bi$, więc trzeba by najpierw podzielić. Własność modułu pozwala tego uniknąć:

$$\left|\frac{2+i}{5-i}\right| = \frac{|2+i|}{|5-i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{5^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}}.$$

MODUŁ POTĘGI

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 33:07

Oblicz $\left|(3+i)^{10}\right|$.

I Bez potęgowania: $\left|(3+i)^{10}\right| = |3+i|^{10} = \left(\sqrt{3^2+1^2}\right)^{10} = \left(\sqrt{10}\right)^{10} = 10^5$.

Sprzężenie też ma naturalne własności.

SPRZĘŻENIE SUMY, ILOCZYNU I ILORAZU

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad \text{dla } w \neq 0.$$

2

Równania z liczbami zespolonymi

W równaniach z liczbami zespolonymi pojawia się sprzężenie, moduł, część rzeczywista albo urojona. Większość z nich rozwiązuje się jedną metodą: zapisujemy niewiadomą jako $z = x + iy$ i porównujemy części rzeczywiste i urojone obu stron. Na końcu – równanie kwadratowe z ujemną deltą i pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej.

Metoda $z = x + iy$

Niewiadomą zapisujemy jako $z = x + iy$, gdzie x i y to liczby rzeczywiste, wstawiamy do równania i porządkujemy obie strony do postaci $a+bi$. Dwie liczby zespolone są równe, gdy mają równe części rzeczywiste i równe części urojone – tak jak dwa punkty płaszczyzny są równe, gdy mają równe obie współrzędne. Równanie zamienia się w układ dwóch równań z niewiadomymi rzeczywistymi.

RÓWNOŚĆ LICZB ZESPOLONYCH

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a + bi = c + di \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \ \text{ i } \ b = d.$$

ZE SPRZĘŻENIEM

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 35:30

Rozwiąż równanie $z + 2\overline{z} = 5 - i$.

I Wstawiamy $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$: $x + iy + 2\,(x - iy) = 5 - i$, czyli $3x - iy = 5 - i$.

II Porównujemy części: $3x = 5$ i $-y = -1$, więc $x = \frac{5}{3}$, $y = 1$ i $z = \frac{5}{3} + i$.

CZĘŚĆ RZECZYWISTA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 38:38

Rozwiąż równanie $\operatorname{Re}(iz) = 5$.

I $i(x+iy) = xi + i^2y = -y + xi$, więc $\operatorname{Re}(iz) = -y$.

II Z równania $-y = 5$ mamy $y = -5$, a na x nie ma żadnego warunku. Rozwiązań jest nieskończenie wiele: $z = x - 5i$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Z MODUŁEM

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 40:35

Rozwiąż równanie $|z| + z = 2 + i$.

I Można od razu wstawić $z = x+iy$, ale moduł da brzydkie $\sqrt{x^2+y^2}$. Lepiej najpierw coś zauważyć: $|z| = 2 + i - z$, a lewa strona to liczba rzeczywista nieujemna. Prawa strona też musi być rzeczywista, więc z musi skasować i: $z = x + i$.

II Wstawiamy: $|x+i| = 2 - x$, czyli $\sqrt{x^2+1} = 2 - x$. Prawa strona nie może być ujemna, więc zakładamy $2 - x \geq 0$, czyli $x \leq 2$.

III Przy tym założeniu podnosimy obie strony do kwadratu: $x^2 + 1 = 4 - 4x + x^2$, więc $x = \frac{3}{4}$. Założenie jest spełnione, więc $z = \frac{3}{4} + i$.

CZĘŚCI PO OBU STRONACH

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 44:37

Rozwiąż równanie $(1+i)\,\overline{z} = 2 + i\operatorname{Re} z$.

I Lewa strona: $(1+i)(x-iy) = x - iy + ix - i^2y = (x+y) + (x-y)\,i$. Prawa strona: $2 + xi$.

II Porównujemy części: $x + y = 2$ i $x - y = x$. Z drugiego równania $y = 0$, z pierwszego $x = 2$. Rozwiązaniem jest $z = 2$ – liczba rzeczywista, ale to też liczba zespolona.

Równanie kwadratowe z ujemną deltą

Równanie kwadratowe o współczynnikach rzeczywistych rozwiązujemy jak w szkole. Różnica jest jedna: ujemna delta nie kończy zadania.

UJEMNA DELTA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 46:57

Rozwiąż równanie $z^2 + 3z + 5 = 0$.

I $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11$. W szkole to byłby koniec: brak rozwiązań.

II W liczbach zespolonych pierwiastek z -11 istnieje: $\left(\pm i\sqrt{11}\right)^2 = i^2 \cdot 11 = -11$. To dwie liczby, ale we wzorze i tak stoi $\pm$, więc wystarczy jedna z nich.

III Ze zwykłego wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $z = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}$.

Pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej

Kłopot pojawia się, gdy współczynniki równania kwadratowego same są liczbami zespolonymi: wtedy delta też jest liczbą zespoloną i trzeba umieć wyciągnąć z niej pierwiastek. Najprostsze takie równanie to $z^2 = w$. Da się je rozwiązać trygonometrycznie, ale w przykładzie niżej byłoby to bardzo trudne – dlaczego, wyjaśni się przy postaci trygonometrycznej. Działa za to metoda $z = x + iy$.

PIERWIASTEK KWADRATOWY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 48:49

Rozwiąż równanie $z^2 = 5 - 12i$.

I Wstawiamy $z = x + iy$: $(x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = 5 - 12i$. Porównujemy części: $x^2 - y^2 = 5$ oraz $2xy = -12$.

II Gdyby $x = 0$, drugie równanie byłoby sprzeczne, więc możemy podzielić przez $2x$: $y = -\frac{6}{x}$. Po wstawieniu $x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$. Podstawiamy $t = x^2$ i mnożymy przez t: $t^2 - 5t - 36 = 0$.

III Jeden pierwiastek łatwo zgadnąć: $t = -4$, bo $16 + 20 - 36 = 0$. Iloczyn pierwiastków to -36 (wzory Viète'a), więc drugi to $t = 9$.

IV $x^2 = -4$ albo $x^2 = 9$. Pierwsze równanie odrzucamy: x jest liczbą **rzeczywistą**, współrzędną punktu. Zostaje $x = \pm 3$, a wtedy $y = -\frac{6}{x} = \mp 2$.

V $z = 3 - 2i$ albo $z = -3 + 2i$. Te liczby różnią się tylko znakiem – tak jak ± 3 przy równaniu $x^2 = 9$.

W metodzie $z = x + iy$ niewiadome x i y są liczbami rzeczywistymi. Równanie $x^2 = -4$ nie daje więc $x = \pm 2i$ – nie ma żadnych rozwiązań.

Skoro pierwiastek w liczbach zespolonych to zbiór, formalnie piszemy

$$\sqrt{5 - 12i} = \{3 - 2i,\ -3 + 2i\}\,.$$

Taki pierwiastek jest potrzebny na przykład w równaniu $z^2 + z + i = 0$. Jego delta to $\Delta = 1 - 4i$, więc trzeba znaleźć liczbę, której kwadrat to $1 - 4i$ – tym samym układem równań co wyżej. Tym razem rachunki są męczące; to zadanie 17 w Dodatku.

3

Ćwiczenia

1 Podaj część rzeczywistą i część urojoną liczby

a) $4-7i$, **b)** $3i-2$, **c)** $-i$, **d)** 6.

2 Oblicz:

a) $(3-2i)+(-1+5i)$,

b) $(3-2i)-(-1+5i)$,

c) $(3-2i)(-1+5i)$,

d) $(2+i)^2$.

3 Oblicz:

a) $\dfrac{1+2i}{3-4i}$, **b)** $\dfrac{1}{i}$, **c)** $\dfrac{5+5i}{1+2i}$.

4 Oblicz:

a) i^7, **b)** i^{100}, **c)** i^{2026}, **d)** i^{2027}.

5 Oblicz iz dla $z=4+i$. Jakim punktom płaszczyzny odpowiadają liczby z i iz?

6 Oblicz moduł liczby

a) $3-4i$, **b)** $-5i$, **c)** $1+i$, **d)** $(2-i)(1+3i)$.

7 Oblicz odległość między liczbami $z=1+2i$ i $w=4-2i$.

8 Nie wykonując dzielenia ani potęgowania, oblicz

a) $\left|\dfrac{4+3i}{1-i}\right|$, **b)** $\left|(1+2i)^6\right|$.

lysyuczymatmy.pl

9 Oblicz $(1-i)^{2026}$.

10 Rozłóż na czynniki:

a) z^2+9,

b) z^2+7.

11 Rozwiąż równanie:

a) $2z-\overline{z}=3+6i$,

b) $z\cdot\overline{z}+2z=3+4i$.

12 Rozwiąż równanie $\mathrm{Re}\left((1+i)\,z\right)=4$.

13 Rozwiąż równanie $|z|-z=1+2i$.

14 Rozwiąż równanie:

a) $z^2-4z+13=0$,

b) $z^2+2z+5=0$.

15 Rozwiąż równanie:

a) $z^2=3+4i$,

b) $z^2=-8-6i$.

4

Dodatek

Dlaczego nie piszemy $i = \sqrt{-1}$

Gdyby $\sqrt{-1}$ było jedną liczbą i działała dla niego szkolna reguła $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, dostalibyśmy

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Ta sprzeczność pokazuje, że szkolnego pierwiastka nie da się po prostu przenieść do liczb zespolonych. Dlatego pierwiastek w $\mathbb{C}$ to zbiór: liczba -1 ma dwa pierwiastki kwadratowe, i oraz $-i$, i żaden z nich nie jest wyróżniony.

Skąd się bierze $|zw| = |z| \cdot |w|$

Wystarczą dwa wzory z filmu: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ oraz $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Wtedy

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2 |w|^2,$$

a moduły są nieujemne, więc $|zw| = |z| \cdot |w|$. Wzór na moduł ilorazu wynika z tego od razu: $z = \frac{z}{w} \cdot w$, więc $|z| = \left|\frac{z}{w}\right| \cdot |w|$.

16 ★ Rozwiąż równanie $z^2 - (3 + 2i)\, z + 5 + 5i = 0$.

17 ★ Rozwiąż równanie $z^2 + z + i = 0$.

18 ★ Wykaż, że jeśli $|z| = 1$, to $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Przy każdym zadaniu jest wynik, wskazówka i szkic rozumowania, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 ODP. a) $\mathrm{Re} = 4$, $\mathrm{Im} = -7$; b) $\mathrm{Re} = -2$, $\mathrm{Im} = 3$; c) $\mathrm{Re} = 0$, $\mathrm{Im} = -1$; d) $\mathrm{Re} = 6$, $\mathrm{Im} = 0$

WSK. Najpierw zapisz liczbę w postaci $a + bi$.

SZKIC b) $3i - 2 = -2 + 3i$; c) $-i = 0 + (-1)\,i$; d) $6 = 6 + 0i$.

2 ODP. a) $2+3i$; b) $4-7i$; c) $7+17i$; d) $3+4i$

WSK. Licz jak na wyrażeniach z x, a i^2 zamieniaj na -1.

SZKIC c) $-3 + 15i + 2i - 10i^2 = -3 + 17i + 10$; d) $4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$.

3 ODP. a) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,i$; b) $-i$; c) $3 - i$

WSK. Rozszerz ułamek przez sprzężenie mianownika.

SZKIC a) $\frac{(1+2i)(3+4i)}{9+16} = \frac{-5+10i}{25}$; b) $\frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{-i}{1}$; c) $\frac{(5+5i)(1-2i)}{1+4} = \frac{15-5i}{5}$.

4 ODP. a) $-i$; b) 1; c) -1; d) $-i$

WSK. Liczy się reszta z dzielenia wykładnika przez 4.

SZKIC $7 = 4+3$, $100 = 4\cdot 25$, $2026 = 4\cdot 506+2$, $2027 = 4\cdot 506 + 3$.

5 ODP. $iz = -1 + 4i$; punkty $(4, 1)$ i $(-1, 4)$

WSK. $i \cdot i = -1$.

SZKIC $i\,(4 + i) = 4i + i^2 = -1 + 4i$; wektory są prostopadłe i mają długość $\sqrt{17}$.

6 ODP. a) 5; b) 5; c) $\sqrt{2}$; d) $5\sqrt{2}$

WSK. $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$; w d) moduł iloczynu.

SZKIC a) $\sqrt{9+16}$; b) $\sqrt{0+25}$; d) $|2 - i| \cdot |1 + 3i| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50}$.

7 ODP. 5

WSK. Odległość to $|z - w|$.

SZKIC $z-w = -3+4i$, a $|-3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

8 ODP. a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; b) 125

WSK. Moduł ilorazu to iloraz modułów, a moduł potęgi – potęga modułu.

SZKIC a) $\frac{|4+3i|}{|1-i|} = \frac{5}{\sqrt{2}}$; b) $|1 + 2i|^6 = \left(\sqrt{5}\right)^6 = 125$.

9 ODP. $-2^{1013}\,i$

WSK. Zacznij od $(1 - i)^2$.

SZKIC $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$, więc $(1 - i)^{2026} = (-2i)^{1013} = (-2)^{1013} \cdot i^{1013} = -2^{1013} \cdot i$, bo $1013 = 4 \cdot 253 + 1$.

10 ODP. a) $(z - 3i)\,(z + 3i)$; b) $\left(z - i\sqrt{7}\right)\left(z + i\sqrt{7}\right)$

WSK. $-9 = (3i)^2$.

SZKIC $z^2 + 9 = z^2 - (3i)^2$ i $z^2 + 7 = z^2 - \left(i\sqrt{7}\right)^2$ – różnice kwadratów.

11 ODP. a) $z = 3 + 2i$; b) $z = -1 + 2i$

WSK. Wstaw $z = x + iy$ i porównaj części.

SZKIC a) $x+3yi = 3+6i$; b) $x^2+y^2+2x+2yi = 3 + 4i$, więc $y = 2$ i $x^2 + 2x + 1 = 0$, czyli $x = -1$.

12 ODP. $z = x + (x-4)\,i$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

WSK. Oblicz $(1+i)(x+iy)$.

SZKIC $(1+i)(x+iy) = (x-y) + (x+y)\,i$, więc $x - y = 4$ i $y = x - 4$; rozwiązań jest nieskończenie wiele.

13 ODP. $z = \frac{3}{2} - 2i$

WSK. $|z| = 1 + 2i + z$ jest liczbą rzeczywistą, więc $\operatorname{Im} z = -2$.

SZKIC $z = x - 2i$: $\sqrt{x^2+4} = 1 + x$ przy $x \geq -1$; po podniesieniu do kwadratu $x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2$, więc $x = \frac{3}{2}$.

14 ODP. a) $z = 2 \pm 3i$; b) $z = -1 \pm 2i$

WSK. Ujemna delta: $\sqrt{-36} = \pm 6i$.

SZKIC a) $\Delta = 16 - 52 = -36$, $z = \frac{4 \pm 6i}{2}$; b) $\Delta = 4 - 20 = -16$, $z = \frac{-2 \pm 4i}{2}$.

15 ODP. a) $z = 2 + i$ albo $z = -2 - i$; b) $z = 1 - 3i$ albo $z = -1 + 3i$

WSK. Porównaj $x^2 - y^2$ i $2xy$ z częściami prawej strony.

SZKIC a) $x^2 - y^2 = 3$, $xy = 2$: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$, $y = \frac{2}{x}$; b) $x^2 - y^2 = -8$, $xy = -3$: $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$, $y = -\frac{3}{x}$.

Dodatek

16 ODP. $z = 2 - i$ albo $z = 1 + 3i$

WSK. Delta jest liczbą zespoloną – potrzebny jej pierwiastek.

SZKIC $\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+5i) = -15 - 8i = (1-4i)^2$, więc $z = \frac{(3+2i) \pm (1-4i)}{2}$.

17 ODP. $z = \frac{-1+a-bi}{2}$ albo $z = \frac{-1-a+bi}{2}$, gdzie $a = \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$

WSK. $\Delta = 1 - 4i$; szukaj $x + iy$ takiego, że $x^2 - y^2 = 1$ i $xy = -2$.

SZKIC $t = x^2$ spełnia $t^2 - t - 4 = 0$, więc $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ (drugi pierwiastek jest ujemny); $y = -\frac{2}{x}$ i $y^2 = t - 1$, stąd $\sqrt{\Delta} = \pm(a - bi)$.

18 zadanie na dowód

WSK. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

SZKIC Jeśli $|z| = 1$, to $z \cdot \overline{z} = 1$, więc $z \neq 0$ i $\overline{z} = \frac{1}{z}$.