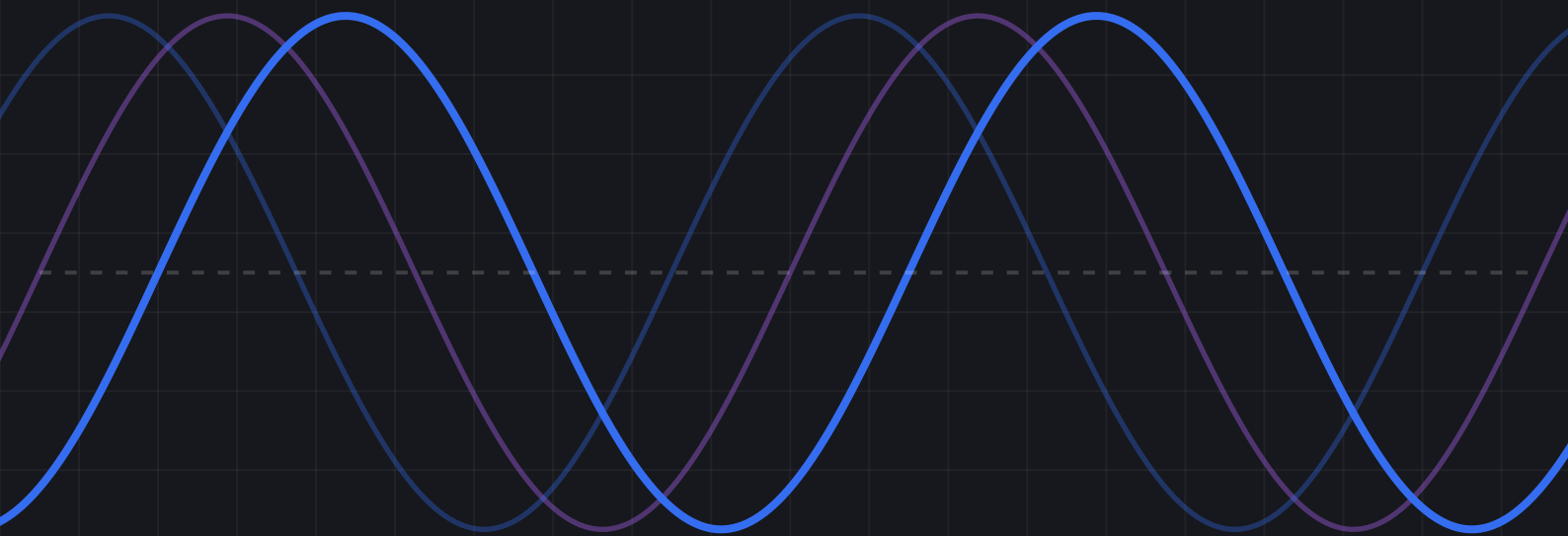




LOGARYTMY I FUNKCJA WYKŁADNICZA

Wszystkie zadania z matur 2015–2026 · poziom rozszerzony

Dwa działy, od najłatwiejszego do najtrudniejszego · z kluczem

ZAWARTOŚĆ ZBIORU

20 ZADAŃ

R



TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

 [Zobacz kurs](#) 

DODATKOWE MATERIAŁY

 [Wszystkie materiały](#) 

 [Autorskie arkusze próbne](#) 

 [Krótkie filmy](#) 

 [Dłuższe filmy](#) 

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

 [Dołącz](#)

O tym zestawie

W tym pliku są **wszystkie zadania z logarytmów i funkcji wykładniczej**, jakie pojawiły się na maturach rozszerzonych w latach 2015–2026 – razem **20**, ze wszystkich terminów. Treści pochodzą wprost z arkuszy CKE i nie są zmieniane; przy każdym zadaniu stoi jego sesja i numer w oryginalnym arkuszu. Plik ma **dwa rozdziały** – **Logarytmy** (15 zadań) i **Funkcja wykładnicza** (5 zadań) – a w każdym z nich zadania idą **od najłatwiejszego do najtrudniejszego**. Na końcu jest **klucz**: wynik, wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania, czyli sam pomysł bez rachunków.

Skąd bierze się poziom trudności

Trudność jest liczbą wyprowadzoną z **poziomu wykonania** – średniego wyniku wszystkich zdających za dane zadanie, podanego w procentach maksymalnej liczby punktów:

$$\text{trudność} = (100 - \text{poziom wykonania}) : 20$$

Jak czytać oznaczenie trudności

Trudność stoi pod każdym zadaniem w skali **od 0 do 5** – pięć kółek zamalowywanych co pół:

Niski poziom trudności ● ● ● ● ● 1/5

Średni poziom trudności ● ● ● ● ● 3/5

Wysoki poziom trudności ● ● ● ● ● 5/5

Plakietka przy numerze zadania

Po lewej stronie nagłówka ramki stoi **źródło** – sesja i numer zadania w arkuszu CKE, po prawej **punktacja**. Między nimi może stać plakietka:

ZWZM zadanie wycofane z matur – tu 8. Wraz z Formułą 2023 zniknęły zadania **zamknięte wielokrotnego wyboru** (odpowiedzi A–D) i **kodowane** (wynik wpisywany cyframi w kratki). Rozwiązywanie ich nadal ma sens: sprawdzają tę samą wiedzę, tylko w takiej formie już nie występują.

Logarytmy

15 ZADAŃ

Zadanie 1

MAJ 2018 · ZADANIE NR 3

ZWZM

1 PKT

Wartość wyrażenia

$$2 \log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5}$$

jest równa

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

TRUDNOŚĆ 1/5

**Zadanie 2**

MAJ 2022 · ZADANIE NR 1

ZWZM

1 PKT

Liczba $\log_3 \sqrt{27} - \log_{27} \sqrt{3}$ jest równaA. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{11}{12}$

D. 3

TRUDNOŚĆ 1,5/5

**Zadanie 3**

CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 2

ZWZM

1 PKT

Liczba

$$\log_4 25 + \log_2 10$$

jest równa

A. $\log_2 15$ B. $\log_2 50$ C. $\log_2 210$ D. $\log_2 635$

TRUDNOŚĆ 1,5/5

**Zadanie 4**

CZERWIEC 2015 · ZADANIE NR 2

ZWZM

1 PKT

Liczba punktów wspólnych wykresów funkcji $y = -x + 1$ i $y = \log_2 x$ jest równa

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

TRUDNOŚĆ 1,5/5



Zadanie 5 CZERWIEC 2018 · ZADANIE NR 1 ZWZM

1 PKT

Niech $L = \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4$. Wtedy

- A. $L = 1$ B. $L = 2$ C. $L = 3$ D. $L = 4$

TRUDNOŚĆ 1,5/5

**Zadanie 6** MAJ 2024 · ZADANIE NR 5

3 PKT

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to

$$\log_{12} 80 = \frac{2a + 1}{a \cdot (1 + b)}.$$

TRUDNOŚĆ 2/5

**Zadanie 7** MAJ 2019 · ZADANIE NR 1 ZWZM

1 PKT

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ wartość wyrażenia

$$\left(\log_{\frac{1}{x}} y\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{y}} x\right)$$

jest równa

- A. $x \cdot y$ B. $\frac{1}{x \cdot y}$ C. -1 D. 1

TRUDNOŚĆ 2/5

**Zadanie 8** MAJ 2021 · ZADANIE NR 6

3 PKT

Niech $\log_2 18 = c$. Wykaż, że

$$\log_3 4 = \frac{4}{c - 1}.$$

TRUDNOŚĆ 2,5/5



Zadanie 9 CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 1

2 PKT

Dane są liczby

$$a = 4^{\log_2 45} \text{ oraz } b = \frac{\log_3 2023}{\log_9 2023}.$$

Oblicz $a - b$.

TRUDNOŚĆ 2,5/5

**Zadanie 10** CZERWIEC 2015 · ZADANIE NR 8

3 PKT

Niech $a = \log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$.

TRUDNOŚĆ 2,5/5

**Zadanie 11** CZERWIEC 2021 · ZADANIE NR 6

3 PKT

Niech $\log_2 9 = c$. Wykaż, że

$$\log_3 54 = \frac{3c + 2}{c}.$$

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 12** CZERWIEC 2026 · ZADANIE NR 1

2 PKT

Dane są liczby rzeczywiste a oraz b :

$$a = 16^{\frac{1}{2} \cdot \log_4 36 - 2 \cdot \log_4 3}$$

$$b = \log_2 9 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$$

Oblicz wartość ilorazu $\frac{a}{2b}$. Wynik zapisz w postaci 3^k , gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 13** CZERWIEC 2025 · ZADANIE NR 2

3 PKT

Wykaż, że jeżeli $a = \log_2 14$ oraz $b = \log_{\sqrt{2}} 27$, to

$$\log_7 54 = \frac{b + 2}{2a - 2}.$$

TRUDNOŚĆ 3,5/5



Zadanie 14

CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 1

ZWZM

1 PKT

Wiadomo, że $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$. Wtedy liczba $\log_{18} 40$ jest równa

A. $\frac{3a+1}{a+b}$

B. $\frac{2a+1}{a+b}$

C. $\frac{2a+1}{a+2b}$

D. $\frac{3a+1}{2b+a}$

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 15**

LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 10

4 PKT

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1$, $b > 1$ i $N > 1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2b} N = \frac{3}{20} \cdot (\log_a N + \log_b N)$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

TRUDNOŚĆ 4,5/5



Funkcja wykładnicza

5 ZADAŃ

Zadanie 16 MAJ 2025 · ZADANIE NR 1

2 PKT

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t, \text{ dla } t \geq 0$$

gdzie:

- N_0 – liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,
- k – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,
- t – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji. W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625.

Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 1/5

**Zadanie 17** CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 1

ZWZM

1 PKT

Funkcja f określona jest wzorem

$$f(x) = |3 + 5^{3-x}| - 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej. Zbiorem wartości funkcji f jest

- A. $(2, +\infty)$ B. $(1, 3)$ C. $\langle -1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

TRUDNOŚĆ 2/5



Zadanie 18 CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 1

2 PKT

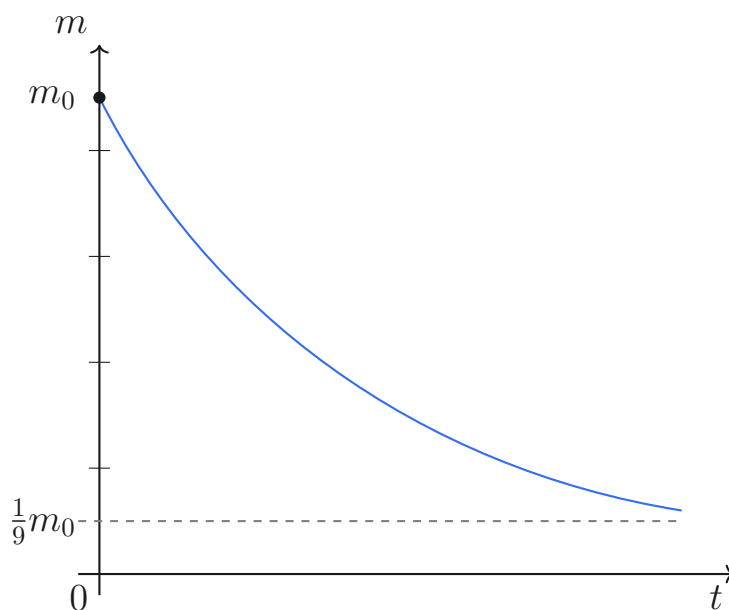
W chwili początkowej ($t = 0$) zainicjowano pewną reakcję chemiczną, w której brał udział związek A. W wyniku tej reakcji masa m związku A zmieniała się w czasie zgodnie z zależnością

$$m(t) = a \cdot 2^{-0,05t} + b \text{ dla } t \geq 0,$$

gdzie:

- m – masa związku A wyrażona w gramach,
- t – czas wyrażony w sekundach (liczony od chwili $t = 0$),
- a, b – współczynniki liczbowe.

Masa początkowa związku A (tj. masa w chwili $t = 0$) była równa m_0 gramów. Po osiągnięciu stanu równowagi (tj. gdy $t \rightarrow \infty$) masa tego związku była równa $\frac{1}{9}$ masy początkowej (zobacz rysunek).



Oblicz, po ilu sekundach (licząc od chwili zainicjowania tej reakcji) przereagowało 87,5% masy początkowej tego związku. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 2,5/5



Zadanie 19 MAJ 2023 · ZADANIE NR 1

2 PKT

W chwili początkowej ($t = 0$) masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od 1,5 grama. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 2,5/5

**Zadanie 20** MAJ 2024 · ZADANIE NR 1

2 PKT

W chwili początkowej ($t = 0$) filiżanka z gorącą kawą znajduje się w pokoju, a temperatura tej kawy jest równa 80°C . Temperatura w pokoju (temperatura otoczenia) jest stała i równa 20°C . Temperatura T tej kawy zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$T(t) = (T_p - T_z) \cdot k^{-t} + T_z, \text{ dla } t \geq 0,$$

gdzie:

- T – temperatura kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,
- t – czas wyrażony w minutach, liczony od chwili początkowej,
- T_p – temperatura początkowa kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,
- T_z – temperatura otoczenia wyrażona w stopniach Celsjusza,
- k – stała charakterystyczna dla danej cieczy.

Po 10 minutach, licząc od chwili początkowej, kawa ostygła do temperatury 65°C .

Oblicz temperaturę tej kawy po następnych pięciu minutach. Wynik podaj w stopniach Celsjusza, w zaokrągleniu do jedności. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 2,5/5



Odpowiedzi, wskazówki i szkice rozwiązań

Numer to numer zadania w tym zestawie. Do każdego zadania: wynik końcowy (przy dowodach pominięty), wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania – sam klucz, bez rachunków.

Logarytmy

1 ODP. C.

WSK. Skorzystaj ze wzoru:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

SZKIC $\frac{1}{\log_{20} 5} = \log_5 20$, więc wyrażenie to $\log_5 100 - \log_5 20 = \log_5 5 = 1$.

2 ODP. A.

WSK. Zapisz 27 jako potęgę liczby 3, aby wyznaczyć pierwszy logarytm. Drugi logarytm możesz wyliczyć korzystając np. ze **wzoru na zmianę podstawy logarytmu**.

SZKIC $\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$, $\log_{27} \sqrt{3} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$; różnica $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$.

3 ODP. B.

WSK. Zamień pierwszy logarytm, korzystając ze **wzoru na zmianę podstawy logarytmu**.

SZKIC $\log_4 25 = \frac{\log_2 25}{2} = \log_2 5$, a $\log_2 5 + \log_2 10 = \log_2 50$.

4 ODP. B

WSK. Naszkicuj wykresy obu funkcji i oceń liczbę punktów przecięcia.

SZKIC $y = -x + 1$ maleje, $y = \log_2 x$ rośnie, więc co najwyżej jeden punkt wspólny – i jest nim $(1, 0)$, bo obie funkcje zerują się w $x = 1$.

5 ODP. D.

WSK. Rozpisz wszystkie logarytmy ze **wzoru na zmianę podstawy logarytmu**, przyjmując nową podstawę 10.

SZKIC Po zamianie na wspólną podstawę środkowe czynniki się skracają i zostaje $\frac{\log 4}{\log \sqrt{2}} = \log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, bo $(\sqrt{2})^4 = 4$.

6 zadanie na dowód

WSK. Skorzystaj ze **wzoru na zmianę podstawy logarytmu**, aby wyrazić $\log_{12} 80$ przez logarytmy przy podstawie 4.

SZKIC $\log_{12} 80 = \frac{\log_4 (16 \cdot 5)}{\log_4 (4 \cdot 3)} = \frac{2 + \log_4 5}{1 + b}$, a $\log_4 5 = \frac{1}{a}$; po sprowadzeniu do wspólnego mianownika $\frac{2a+1}{a(1+b)}$.

7 ODP. D.

WSK. Zamień podstawy wszystkich logarytmów na 10, korzystając ze **wzoru na zmianę podstawy logarytmu**.

SZKIC $\log_{1/x} y = \frac{\log y}{-\log x}$ i $\log_{1/y} x = \frac{\log x}{-\log y}$ – iloczyn to 1.

8 zadanie na dowód

WSK. Przekształć założenie $\log_2 18 = c$, korzystając ze **wzorów na logarytm iloczynu i logarytm potęgi**, aby wyznaczyć wartość $\log_2 3$. Następnie zamień podstawę logarytmu

w wyrażeniu $\log_3 4$ na 2.

SKZIC $c = \log_2(2 \cdot 9) = 1 + 2 \log_2 3$, więc $\log_2 3 = \frac{c-1}{2}$; stąd $\log_3 4 = \frac{2}{\log_2 3} = \frac{4}{c-1}$.

9 ODP. 2023.

WSK. W celu obliczenia wartości liczby a skorzystaj z **własności działań na potęgach** oraz wzoru wynikającego z **definicji logarytmu**:

$$x^{\log_x y} = y.$$

Aby uprościć liczbę b , zastosuj **wzór na zmianę podstawy logarytmu**:

$$\log_x y = \frac{\log_c y}{\log_c x}.$$

SKZIC $a = (2^2)^{\log_2 45} = 45^2 = 2025$; $b = \log_3 9 = 2$ (wzór na zmianę podstawy czytany od tyłu). $a - b = 2023$.

10 zadanie na dowód

WSK. Zmień podstawę logarytmu $\log_6 64$ na 12, korzystając ze **wzoru na zmianę podstawy logarytmu**.

$$\text{SKZIC } \log_6 64 = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6} = \frac{6 \log_{12} 2}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2} = \frac{6a}{1-a}.$$

11 zadanie na dowód

WSK. Zamień wszystkie logarytmy ze **wzoru na zmianę podstawy logarytmu**, przyjmując za podstawę 2.

SKZIC $\log_3 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 3} = \frac{3 \log_2 3 + 1}{\log_2 3}$, a $\log_2 3 = \frac{c}{2}$; po podstawieniu $\frac{3c+2}{c}$.

12 ODP. $\frac{a}{2b} = 3^{-3}$.

WSK. Wykładnik liczby a zwiń do jednego logarytmu o podstawie 4; w b zamień wszystkie podstawy na 3 – czynniki się poskracają.

$$\text{SKZIC } a = 4^{\log_4 36 - 4 \log_4 3} = 4^{\log_4 \frac{36}{81}} = \frac{4}{9}; b = \frac{\log_3 9}{\log_3 2} \cdot \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 8}{\log_3 5} = \frac{2 \cdot 3 \log_3 2}{\log_3 2} = 6. \frac{a}{2b} = \frac{4}{108} = 3^{-3}.$$

13 zadanie na dowód

WSK. W takich zadaniach najłatwiej zacząć od rozpisania wszystkich logarytmów za pomocą wzoru na **zmianę podstawy logarytmu**, przyjmując za nową podstawę 10. Przypomnijmy, że logarytm dziesiętny oznaczamy jako **log** (tzn. nie piszemy już podstawy). Przyjęcie takiej strategii ułatwi rachunki i zmniejszy ryzyko popełnienia błędów.

SKZIC $\log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7}$. Licznik: $1 + 3 \log_2 3$, a $b = 6 \log_2 3$ jest $\log_2 3 = \frac{b}{6}$, więc licznik to $\frac{b+2}{2}$. Mianownik: $a = 1 + \log_2 7$, więc $\log_2 7 = a - 1$. Razem $\frac{b+2}{2a-2}$.

14 ODP. D.

WSK. Skorzystaj ze **wzoru na zmianę podstawy logarytmu**, aby wyrazić szukany logarytm przy użyciu podstawy 5.

$$\text{SKZIC } \log_{18} 40 = \frac{\log_5(2^3 \cdot 5)}{\log_5(2 \cdot 3^2)} = \frac{3a+1}{a+2b}.$$

15 ODP. $\log_a b = 3$ lub $\log_a b = \frac{2}{3}$.

WSK. Zastosuj **wzór na zmianę podstawy logarytmu**, aby zapisać wszystkie logarytmy przy tej samej podstawie, np. a . Następnie podstaw zmienną pomocniczą $t = \log_a b$.

SKZIC Dla $t = \log_a b$: $\log_{a^2b} N = \frac{\log_a N}{2+t}$, $\log_b N = \frac{\log_a N}{t}$. Po skróceniu $\log_a N$ równanie to $\frac{1}{2+t} = \frac{3(t+1)}{20t}$, czyli $3t^2 - 11t + 6 = 0$: $t = 3$ lub $t = \frac{2}{3}$.

Funkcja wykładnicza

16 ODP. 25%.

WSK. Wyznacz N_0 , korzystając z tego, że $N(0) = 10\,000$, a następnie wyznacz k , korzystając z warunku $N(2) = 15\,625$.

SKZIC $N_0 = 10\,000$, $k^2 = 1,5625$, $k = 1,25$ – co godzinę o 25%.

17 ODP. A.

WSK. Zwróć uwagę, że wyrażenie pod modulem

jest zawsze dodatnie, więc można opuścić moduł.

SKIK $3 + 5^{3-x} > 0$, więc $f(x) = 2 + 5^{3-x}$; 5^{3-x} przebiega $(0, +\infty)$, zatem zbiór wartości to $(2, +\infty)$.

18 ODP. 120 sekund.

WSK. Skorzystaj z faktu, że

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 2^{-0,05t} = 0.$$

SKIK Granica daje $b = \frac{1}{9}m_0$, warunek początkowy $a = \frac{8}{9}m_0$. Zostało $\frac{1}{8}m_0$: $\frac{8}{9} \cdot 2^{-0,05t} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$, więc $2^{-0,05t} = 2^{-6}$ i $t = 120$.

19 ODP. $m(t) = 4 \cdot (0,81)^t$ oraz 5 dób.

WSK. Zauważ, że masy substancji w kolejnych

dobach tworzą ciąg geometryczny. Skorzystaj ze **wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego** lub ze **wzoru na procent składany** (z ujemnym oprocentowaniem).

SKIK $m(t) = 4 \cdot 0,81^t$. Warunek $0,81^t < 0,375$: $0,81^4 \approx 0,43$, $0,81^5 \approx 0,35$ – po raz pierwszy po 5 dobach.

20 ODP. 59°C .

WSK. Wstaw do wzoru funkcji $T(t)$ dane z zadania: $T_p = 80$, $T_z = 20$. Następnie korzystając z informacji, że $T(10) = 65$ wyznacz k^{-10} .

SKIK $T(t) = 60k^{-t} + 20$; z $T(10) = 65$ jest $k^{-10} = \frac{3}{4}$. $T(15) = 60\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} + 20 = \frac{45\sqrt{3}}{2} + 20 \approx 59$.