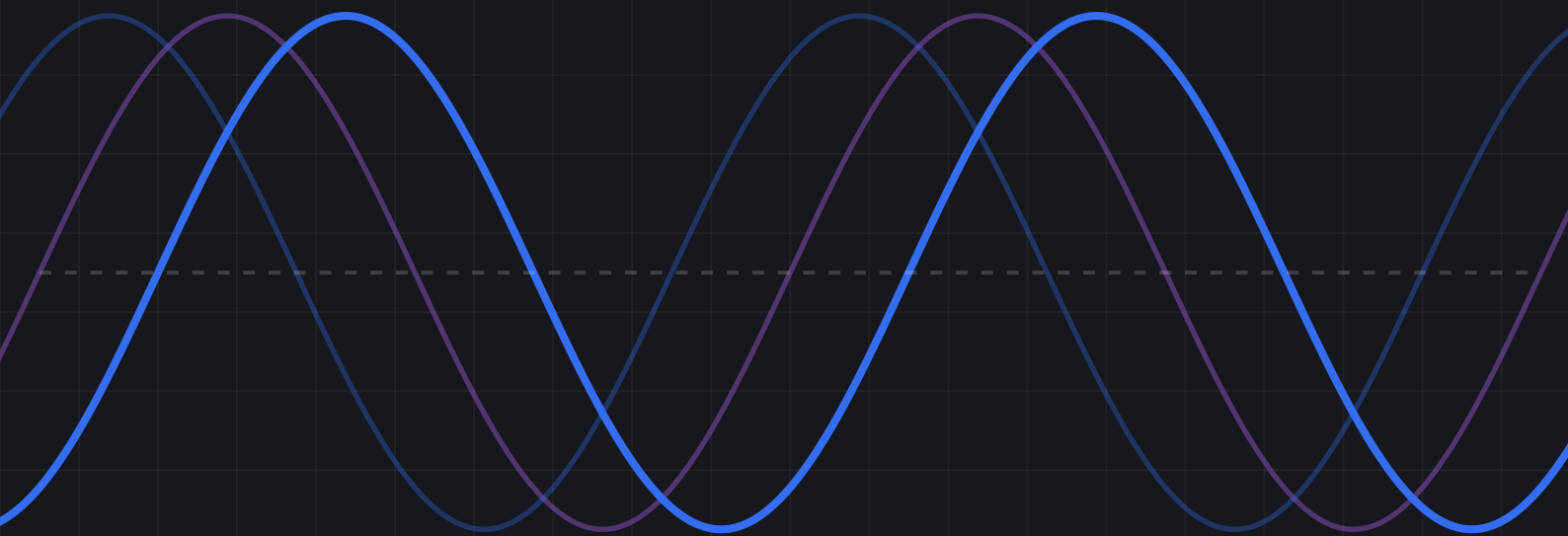




KOMBINATORYKA

I PRAWDOPODOBIENSTWO

Wszystkie zadania z matur 2015–2026 · poziom rozszerzony

Dwa działy, od najłatwiejszego do najtrudniejszego · z kluczem

ZAWARTOŚĆ ZBIORU

34 ZADANIA

R



TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

 [Zobacz kurs](#) 

DODATKOWE MATERIAŁY

 [Wszystkie materiały](#) 

 [Autorskie arkusze próbne](#) 

 [Krótkie filmy](#) 

 [Dłuższe filmy](#) 

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

 [Dołącz](#)

O tym zestawie

W tym pliku są **wszystkie zadania z kombinatoryki i prawdopodobieństwa**, jakie pojawiły się na maturach rozszerzonych w latach 2015–2026 – razem **34**, ze wszystkich terminów. Treści pochodzą wprost z arkuszy CKE i nie są zmieniane; przy każdym zadaniu stoi jego sesja i numer w oryginalnym arkuszu. Plik ma **dwa rozdziały** – **Kombinatoryka** (13 zadań) i **Prawdopodobieństwo** (21 zadań) – a w każdym z nich zadania idą **od najłatwiejszego do najtrudniejszego**. Na końcu jest **klucz**: wynik, wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania, czyli sam pomysł bez rachunków.

Skąd bierze się poziom trudności

Trudność jest liczbą wyprowadzoną z **poziomu wykonania** – średniego wyniku wszystkich zdających za dane zadanie, podanego w procentach maksymalnej liczby punktów:

$$\text{trudność} = (100 - \text{poziom wykonania}) : 20$$

Dla zadań z terminów głównych matur 2015–2026 trudność jest wyznaczona na podstawie statystyk poziomu wykonania CKE, dla pozostałych – szacowana.

Jak czytać oznaczenie trudności

Trudność stoi pod każdym zadaniem w skali **od 0 do 5** – pięć kółek zamalowywanych co pół:

Niski poziom trudności ● ● ● ● ● 1/5

Średni poziom trudności ● ● ● ● ● 3/5

Wysoki poziom trudności ● ● ● ● ● 5/5

Plakietka przy numerze zadania

Po lewej stronie nagłówka ramki stoi **źródło** – sesja i numer zadania w arkuszu CKE, po prawej **punktacja**. Między nimi może stać plakietka:

ZWZM zadanie wycofane z matur – tu **7**. Wraz z Formułą 2023 zniknęły zadania **zamknięte wielokrotnego wyboru** (odpowiedzi A–D) i **kodowane** (wynik wpisywany cyframi w kratki). Rozwiązywanie ich nadal ma sens: sprawdzają tę samą wiedzę, tylko w takiej formie już nie występują.

Kombinatoryka

13 ZADAŃ

Zadanie 1 MAJ 2016 · ZADANIE NR 14

3 PKT

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 2** MAJ 2019 · ZADANIE NR 6

3 PKT

Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiegokolwiek cyfry.

Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 3** CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 15

4 PKT

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 4** CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 7

3 PKT

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste.

TRUDNOŚĆ 3,5/5



Zadanie 5 CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 2

3 PKT

Wśród n osób są Ania i jej dwaj znajomi. Wszystkie te n osób ustawiamy w kolejkę jedna za drugą. Liczba wszystkich takich ustawień jest 12 razy większa od liczby wszystkich takich ustawień tych n osób w kolejkę, w których Ania i jej dwaj znajomi zajmują trzy kolejne miejsca (w dowolnej kolejności).

Oblicz n . Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 6** CZERWIEC 2026 · ZADANIE NR 2

3 PKT

Rozważamy wszystkie dziewięciocyfrowe kody, które spełniają jednocześnie następujące warunki:

- na pierwszym miejscu kodu znajduje się cyfra 2
- cyfra 4 występuje w kodzie dokładnie trzy razy
- cyfra 8 występuje dokładnie dwa razy
- pozostałe cyfry kodu są parami różnymi liczbami nieparzystymi.

Oblicz liczbę wszystkich takich kodów. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 7** CZERWIEC 2019 · ZADANIE NR 6

3 PKT

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 8** CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 13

4 PKT

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

TRUDNOŚĆ 4/5



Zadanie 9 LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 13

3 PKT

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 10** MAJ 2024 · ZADANIE NR 6

3 PKT

Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakiegokolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 11** CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 9

4 PKT

Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15.

Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

TRUDNOŚĆ 4,5/5

**Zadanie 12** CZERWIEC 2025 · ZADANIE NR 3

3 PKT

Rozważamy wszystkie liczby naturalne sześciocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb sześciocyfrowych. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4,5/5

**Zadanie 13** CZERWIEC 2015 · ZADANIE NR 13

5 PKT

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

TRUDNOŚĆ 4,5/5



Prawdopodobieństwo

21 ZADAŃ

Zadanie 14

MAJ 2022 · ZADANIE NR 4

ZWZM

1 PKT

Dane są dwie urny z kulami. W każdej z urn jest siedem kul. W pierwszej urnie jest jedna kula biała i sześć kul czarnych, w drugiej urnie są cztery kule białe i trzy kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku - jedną kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy kulę białą w tym doświadczeniu, jest równe

A. $\frac{5}{14}$

B. $\frac{9}{14}$

C. $\frac{5}{7}$

D. $\frac{6}{7}$

TRUDNOŚĆ 1/5

**Zadanie 15**

CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 3

ZWZM

1 PKT

Mamy dwie urny. W pierwszej są 3 kule białe i 7 kul czarnych, w drugiej jest jedna kula biała i 9 kul czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek, od jednego oczka do sześciu oczek. Jeśli w wyniku rzutu otrzymamy ściankę z jednym oczkiem, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku losujemy jedną kulę z drugiej urny. Wtedy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

A. $\frac{2}{15}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{13}{15}$

TRUDNOŚĆ 1/5

**Zadanie 16**

MAJ 2019 · ZADANIE NR 4

ZWZM

1 PKT

Zdarzenia losowe A i B zawarte w Ω są takie, że prawdopodobieństwo $P(B')$ zdarzenia B' przeciwnego do zdarzenia B jest równe $\frac{1}{4}$. Ponadto prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B) = \frac{1}{5}$. Wynika stąd, że

A. $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

B. $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$

C. $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$

D. $P(A \cap B) = \frac{4}{5}$

TRUDNOŚĆ 1,5/5



Zadanie 17 MAJ 2023 · ZADANIE NR 2

3 PKT

Tomek i Romek postanowili rozegrać między sobą pięć partii szachów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Tomka jest równe $\frac{1}{4}$.

Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 1,5/5

**Zadanie 18** CZERWIEC 2019 · ZADANIE NR 5

ZWZM

2 PKT

W urnie znajduje się 16 kul, które mogą się różnić wyłącznie kolorem. Wśród nich jest 10 kul białych i 6 kul czarnych. Z tej urny losujemy dwukrotnie jedną kulę bez zwracania.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych.

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

TRUDNOŚĆ 2/5

**Zadanie 19** MAJ 2015 · ZADANIE NR 11

4 PKT

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

TRUDNOŚĆ 2/5



Zadanie 20

CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 5

ZWZM

2 PKT

Wśród 390 pracowników pewnej firmy jest 150 kobiet i 240 mężczyzn. Wśród nich w wieku przedemerytalnym jest 21 kobiet i 43 mężczyzn.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany pracownik tej firmy jest w wieku przedemerytalnym – pod warunkiem, że jest mężczyzną.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

TRUDNOŚĆ 2,5/5

**Zadanie 21**

CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 4

3 PKT

Doświadczenie losowe polega na dziesięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu losowym orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, jeśli wiadomo, że wypadł dokładnie trzy razy. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 2,5/5

**Zadanie 22**

MAJ 2024 · ZADANIE NR 3

3 PKT

W pewnym zakładzie mleczarskim śmietana produkowana jest w 200-gramowych opakowaniach. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym opakowaniu śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu, jest równe 0,01. Kontroli poddajemy 10 losowo wybranych opakowań ze śmietaną.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród opakowań poddanych tej kontroli będzie co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 2,5/5



Zadanie 23 CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 3

3 PKT

Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii sieci ciepłowniczej na pewnym osiedlu mieszkaniowym w godzinach porannych pojedynczego dnia jest równe $0,1$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w okresie siedmiu dni wystąpią co najwyżej dwa takie dni, w których nastąpi awaria tej sieci na tym osiedlu w godzinach porannych. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 24** CZERWIEC 2025 · ZADANIE NR 1

3 PKT

Sklep AGD prowadzi sprzedaż wysyłkową pralek. Prawdopodobieństwo uszkodzenia podczas transportu pralki wysłanej przez ten sklep do klienta jest równe $0,02$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że spośród 10 pralek wysłanych dziesięciu klientom przez ten sklep co najwyżej jedna ulegnie uszkodzeniu podczas transportu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 25** CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 7 ZWZM

2 PKT

Dane są zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = \frac{2}{7}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

Oblicz $P(B \setminus A)$, gdzie zdarzenie $B \setminus A$ oznacza różnicę zdarzeń B i A .

Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

TRUDNOŚĆ 3/5



Zadanie 26

MAJ 2016 · ZADANIE NR 6

ZWZM

2 PKT

Wśród 10 tysięcy mieszkańców pewnego miasta przeprowadzono sondaż dotyczący budowy przedszkola publicznego. Wyniki sondażu przedstawiono w tabeli.

Badane grupy	Liczba osób popierających budowę przedszkola	Liczba osób niepopierających budowy przedszkola
Kobiety	5140	1860
Mężczyźni	2260	740

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana osoba, spośród ankietowanych, popiera budowę przedszkola, jeśli wiadomo, że jest mężczyzną.

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 27**

MAJ 2026 · ZADANIE NR 2

3 PKT

Ze zbioru ośmiu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy bez zwracania osiem razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg zgodnie z kolejnością losowania.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowane liczby utworzą ciąg, w którym iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów będzie liczbą podzielna przez 3. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 28**

MAJ 2021 · ZADANIE NR 9

4 PKT

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

TRUDNOŚĆ 3,5/5



Zadanie 29 CZERWIEC 2026 · ZADANIE NR 6

4 PKT

Chleb sprzedawany w pewnym supermarkecie pochodzi z trzech piekarni: $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$. Stosunek liczby bochenków chleba dostarczonego przez piekarnie $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ oraz $\mathcal{P}_3$ do tego supermarketu jest – odpowiednio – równy $2 : 3 : 4$.

Liczba bochenków chleba razowego dostarczonego do tego supermarketu z piekarni:

- $\mathcal{P}_1$ stanowi 10% liczby wszystkich bochenków chleba dostarczonego z tej piekarni
- $\mathcal{P}_2$ stanowi 12% liczby wszystkich bochenków chleba dostarczonego z tej piekarni
- $\mathcal{P}_3$ stanowi 15% liczby wszystkich bochenków chleba dostarczonego z tej piekarni.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że bochenek chleba losowo wybrany w tym supermarkecie pochodzi z piekarni $\mathcal{P}_1$, jeśli wiadomo, że ten chleb jest razowy. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 30** CZERWIEC 2018 · ZADANIE NR 9

4 PKT

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, losujemy jedną.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 31** MAJ 2017 · ZADANIE NR 11

4 PKT

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do pudełka. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

TRUDNOŚĆ 4/5



Zadanie 32 MAJ 2018 · ZADANIE NR 9

4 PKT

Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 33** CZERWIEC 2021 · ZADANIE NR 11

4 PKT

W pewnym telewizyjnym programie bierze udział trzech sportowców i pewna liczba aktorów. W trakcie tego programu uczestnicy siadają na fotelach w rzędzie, naprzeciw prowadzącego (liczba foteli jest równa liczbie uczestników). Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że cała trójka sportowców będzie siedziała obok siebie przy losowym wyborze miejsc jest równe $\frac{1}{15}$.

Oblicz, ilu aktorów bierze udział w tym programie.

TRUDNOŚĆ 4,5/5

**Zadanie 34** MAJ 2025 · ZADANIE NR 4

3 PKT

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek od jednego oczka do sześciu oczek.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4,5/5



Odpowiedzi, wskazówki i szkice rozwiązań

Numer to numer zadania w tym zestawie. Do każdego zadania: wynik końcowy (przy dowodach pominięty), wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania – sam klucz, bez rachunków.

Kombinatoryka

1 zadanie na dowód

WSK. Zaczynij od policzenia na ile sposobów można wybrać miejsca dla cyfry 1.

SZKIC Miejsca dla trzech jedynek: $\binom{10}{3} = 120$; pozostałe siedem pozycji po dwie możliwości: $2^7 = 128$. $120 \cdot 128 = 15\,360$.

2 ODP. 6 666 600.

WSK. Zauważ, że jeśli wypisać by wszystkie takie liczby w tabeli, to w każdej kolumnie każda cyfra występuje tyle samo razy.

SZKIC $5! = 120$ liczb; w każdej kolumnie każda cyfra stoi 24 razy, suma kolumny $24 \cdot 25 = 600$; razem $600 \cdot 11\,111 = 6\,666\,600$.

3 ODP. 28750

WSK. Rozważ dwa rozłączne przypadki ze względu na parzystość pierwszej cyfry liczby pięciocyfrowej. Pamiętaj, że pierwsza cyfra nie może być zerem. Do wyboru miejsc dla cyfr wykorzystaj **symbol Newtona** (kombinacje).

SZKIC Pierwsza nieparzysta: $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 18\,750$; pierwsza parzysta (bez zera): $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5 = 10\,000$. Razem 28 750.

4 ODP. 27500.

WSK. Rozważ dwa przypadki ze względu na parzystość pierwszej cyfry liczby pięciocyfrowej.

Pamiętaj, że pierwsza cyfra nie może być zerem.

SZKIC Pierwsza nieparzysta: $5 \cdot \binom{4}{1} \cdot 5 \cdot 5^3 = 12\,500$; pierwsza parzysta (bez zera): $4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 15\,000$. Razem 27 500.

5 ODP. $n = 9$.

WSK. Skorzystaj z faktu, że liczba sposobów ustawienia n elementów w ciąg (permutacji) wynosi $n!$. Aby policzyć liczbę ustawień, w których 3 osoby stoją obok siebie, potraktuj tę trójkę jako jeden element (tzw. blok).

SZKIC $n! = 12 \cdot (n - 2)! \cdot 3!$ (trójka jako blok), czyli $n(n - 1) = 72$, $n = 9$.

6 ODP. 33 600.

WSK. Ustaw czwórki, potem ósemki na wolnych miejscach, a na trzech ostatnich pozycjach trzy różne cyfry nieparzyste – reguła mnożenia.

SZKIC $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 56 \cdot 10 \cdot 60 = 33\,600$.

7 ODP. 147.

WSK. Rozłóż liczbę 28 na czynniki będące cyframi. Zauważ, że pozostałe cyfry liczby siedmiocyfrowej muszą być jedynekami. Rozważ dwa rozłączne przypadki zestawów cyfr.

SZKIC Cyfry $\{4, 7, 1, 1, 1, 1, 1\}$: $7 \cdot 6 = 42$ liczb; $\{2, 2, 7, 1, 1, 1, 1\}$: $\binom{7}{2} \cdot 5 = 105$. Razem 147.

8 ODP. 12960.

WSK. Policz najpierw ile jest takich liczb, nie przejmując się, że 0 może być na początku. Następnie policz ile „złych liczb” zliczyłeś (sposób ich wyliczenia będzie bardzo podobny do pierwszej części).

SZKIC Wszystkie ciągi: $\binom{7}{3} \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 13\,440$; z zerem na początku: $\binom{6}{3} \binom{3}{2} \cdot 8 = 480$. Różnica 12 960.

9 ODP. 147.

WSK. Rozłóż liczbę 28 na czynniki, które są cyframi (od 1 do 9). Pamiętaj, że liczba składa się z 7 cyfr, więc pozostałe miejsca (niezajęte przez czynniki 28) muszą być wypełnione cyframi 1. Rozważ dwa rozłączne przypadki zestawów cyfr.

SZKIC $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$, reszta cyfr to jedyńki: $7 \cdot 6 + \binom{7}{2} \cdot 5 = 42 + 105 = 147$.

10 ODP. 11 040.

WSK. Rozważ dwa przypadki ze względu na parzystość pierwszej cyfry liczby. Pamiętaj, że pierwsza cyfra liczby pięciocyfrowej nie może być zerem!

SZKIC Pierwsza nieparzysta: $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot (4 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 4) = 7200$; pierwsza parzysta bez zera: $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot 4 = 3840$. Razem 11 040.

11 ODP. 18.

WSK. Liczba utworzona z podanych cyfr jest podzielna przez 15, gdy jej ostatnia cyfra to 0 i suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

SZKIC Ostatnia cyfra 0, pierwsza 1 lub 2, środkowe dowolne z $\{0, 1, 2\}$: $2 \cdot 27 = 54$ układów. Przy ustalonych trzech pierwszych cyfrach czwarta dopełnia sumę do wielokrotności 3 na dokładnie jeden sposób, więc dobrych jest $\frac{54}{3} = 18$.

12 ODP. 368 586

WSK. Możliwe iloczyny to 4, 2 i 0. Rozważ osobne przypadki. W przypadku z 0 posłuż się zdarzeniem przeciwnym.

SZKIC Iloczyn 4: $\{2, 2, 1, 1, 1, 1\}$ i $\{4, 1, 1, 1, 1, 1\}$ – $15 + 6$; iloczyn 2: 6; iloczyn 0: $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9^5 = 368\,559$. Razem 368 586.

13 ODP. 44361

WSK. Musisz rozbić problem na trzy **rozłączne** przypadki: brak dwójek, jedna dwójka, dwie dwójki.

SZKIC Wygodniej od drugiej strony: parzystych pięciocyfrowych jest $9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45\,000$, a z co najmniej trzema dwójkami $599 + 39 + 1 = 639$ (dokładnie 3, 4, 5 dwójek, z uwagą na pierwszą cyfrę $\neq 0$ i ostatnią parzystą). Wynik 44 361.

Prawdopodobieństwo

14 ODP. A.

WSK. Skorzystaj z **metody drzewka probabilistycznego**.

SZKIC $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$.

15 ODP. A.

WSK. Skorzystaj z **metody drzewka probabilistycznego**.

SZKIC $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$.

16 ODP. C.

WSK. Skorzystaj ze **wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

SZKIC $P(B) = \frac{3}{4}$, więc $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$.

17 ODP. $\frac{1}{64}$.

WSK. Skorzystaj ze **schematu Bernoulliego**

dla $n = 5$ prób. Zauważ, że zdarzenie „wygranie co najmniej czterech partii” jest sumą dwóch rozłącznych zdarzeń: wygrania dokładnie czterech partii oraz wygrania dokładnie pięciu partii.

SZKIC Bernoulli, $n = 5$, $p = \frac{1}{4}$: $\binom{5}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15+1}{1024} = \frac{1}{64}$.

18 ODP. 375

WSK. Nie zapomnij, że losujemy po kolei po jednej kuli bez zwracania.

SZKIC $\frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} = \frac{3}{8} = 0,375$.

19 ODP. $P = \frac{5}{11}$.

WSK. Skorzystaj z **metody drzewka probabilistycznego**.

SZKIC Biała z I ($\frac{3}{8}$): w II jest 10 białych i 2 czarne, $P = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{15}{22}$; czarna ($\frac{5}{8}$): 7 białych i 5 czarnych, $P = \frac{7}{22}$. Razem $\frac{3}{8} \cdot \frac{15}{22} + \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{22} = \frac{80}{176}$.

20 ODP. 179.

WSK. Oznacz przez A zdarzenie – wylosowany pracownik jest w wieku przedemerytalnym oraz przez M zdarzenie – wylosowany pracownik jest mężczyzną. Prawdopodobieństwo warunkowe wylicz ze wzoru:

$$P(A|M) = \frac{|A \cap M|}{|M|}.$$

SZKIC $P(A|M) = \frac{43}{240} = 0,179 \dots$

21 ODP. $\frac{1}{15}$.

WSK. Skorzystaj ze wzoru:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Zauważ, że nie musisz liczyć $|\Omega|$, lecz tylko moce zdarzeń B oraz $A \cap B$ (A i B).

SZKIC $|B| = \binom{10}{3} = 120$ układów trzech orłów; blok OOO w dziesięciu rzutach ma 8 położeń, więc $P(A|B) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

22 ODP. 0,996.

WSK. Zadanie dotyczy **schematu Bernoulliego**. Szukane prawdopodobieństwo to suma prawdopodobieństw dwóch zdarzeń: że będzie dokładnie 0 sukcesów oraz że będzie dokładnie 1 sukces.

SZKIC Bernoulli, $n = 10$, sukces = wadliwe opakowanie ($p = 0,01$): $q^{10} + 10pq^9 = 0,99^{10} + 0,1 \cdot 0,99^9 \approx 0,904 + 0,091 \approx 0,996$.

23 ODP. $P(A) \approx 0,97$.

WSK. Zauważ, że mamy do czynienia ze **schematem Bernoulliego** ($n = 7$ prób). Zdarzenie „co najwyżej dwa dni” oznacza, że awaria wystąpi dokładnie 0 razy, dokładnie 1 raz lub dokładnie 2 razy.

SZKIC Bernoulli, $n = 7$, $p = 0,1$: $0,9^7 + 7 \cdot 0,1 \cdot 0,9^6 + 21 \cdot 0,01 \cdot 0,9^5 \approx 0,478 + 0,372 + 0,124 \approx 0,97$.

24 ODP. 0,984

WSK. Skorzystaj ze **schematu Bernoulliego**.

SZKIC Bernoulli, $n = 10$, $p = 0,02$: $0,98^{10} + 10 \cdot 0,02 \cdot 0,98^9 \approx 0,817 + 0,167 \approx 0,984$.

25 ODP. 314

WSK. Zauważ (np. korzystając z **diagramu Venna**), że $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

SZKIC $P(B \setminus A) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{11}{35} = 0,314 \dots$

26 ODP. 753

WSK. Skorzystaj ze wzoru:

$$P(A|M) = \frac{|A \cap M|}{|M|}.$$

SZKIC $P(A|M) = \frac{2260}{3000} = 0,7533 \dots$

27 ODP. $\frac{1}{28}$.

WSK. Czynniki 3 wnoszą tylko 3 i 6 – na których dwu pozycjach muszą stać, żeby każda trójka

kolejnych wyrazów zawierała jedną z nich?

szkic Sześć trójek kolejnych pozycji 1–3, ..., 6–8 musi każda zawierać 3 lub 6; dwie liczby pokrywają je wszystkie tylko na pozycjach 3 i 6. Sprzyjających jest $2 \cdot 6!$, więc $P = \frac{2 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{28}$.

28 ODP. $\frac{1}{5}$.

WSK. Skorzystaj ze **wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe**: $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. Zauważ, że liczby podzielne przez daną liczbę tworzą ciąg arytmetyczny. Liczba jest podzielna przez 15 i 18 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez ich **najmniejszą wspólną wielokrotność** ($NWW(15, 18)$).

szkic Czerocyfrowych wielokrotności 18 jest $\frac{9990-1008}{18} + 1 = 500$, a wielokrotności $NWW(15, 18) = 90$ jest $\frac{9990-1080}{90} + 1 = 100$; $P = \frac{100}{500}$.

29 ODP. $\frac{5}{29}$.

WSK. Prawdopodobieństwo całkowite razowego chleba z trzech piekarni, potem wzór Bayesa – albo policz wprost na $9n$ bochenkach.

szkic Na $9n$ bochenków razowych jest $0,2n + 0,36n + 0,6n = 1,16n$, z czego z $\mathcal{P}_1$ pochodzi $0,2n$: $P = \frac{0,2}{1,16} = \frac{5}{29}$.

30 ODP. $P(A) = \frac{11}{699\,840}$.

WSK. Zauważ, że przy tym zestawie cyfr możliwe są dwa przypadki, w których suma cyfr wynosi 3. Gdy jedna cyfra to 3 a pozostałe to 0 oraz gdy trzy cyfry to 1, a pozostałe 0.

szkic $|\Omega| = 5 \cdot 6^7$. Suma 3: albo jedna trójka i zera (trójka musi stać na początku – 1 liczba), albo trzy jedynki i zera (jedynka na początku, dwie pozostałe na $\binom{7}{2} = 21$ sposobów). $P = \frac{22}{5 \cdot 6^7}$.

31 ODP. $\frac{11}{16}$.

WSK. Skorzystaj z **metody zdarzenia prze-**

ciwnego, którego moc o wiele łatwiej policzyć w tym przypadku.

szkic $|\Omega| = 8^3 = 512$. Iloczyn NIE dzieli się przez 4, gdy wszystkie liczby są nieparzyste (4^3) albo dokładnie jedna to 2 lub 6, a dwie nieparzyste ($3 \cdot 2 \cdot 4^2$): razem 160. $P = 1 - \frac{160}{512} = \frac{11}{16}$.

32 ODP. $P(A) = \frac{5}{14}$.

WSK. Zwróć uwagę, że zbiór jest **ośmioelementowy** (nie ma w nim liczby 8). Żeby uzyskać prawidłowe ustawienia wyobraź sobie, że najpierw ustawiamy 5 liczb nieparzystych i pozostawiamy luki między nimi (także na krańcach).

szkic Ustaw 5 nieparzystych ($5!$), a 3 parzyste wstaw w 3 z 6 luk ($\binom{6}{3} \cdot 3!$): $P = \frac{5! \cdot 20 \cdot 6}{8!} = \frac{5}{14}$.

33 ODP. 7 aktorów.

WSK. Potraktuj trzech sportowców jako jeden element (tzw. blok), aby obliczyć liczbę zdarzeń sprzyjających. Pamiętaj, że liczba sposobów ustawienia n elementów w ciąg (permutacji) wynosi $n!$.

szkic Sportowcy jako blok: $\frac{(n+1)! \cdot 3!}{(n+3)!} = \frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{15}$, czyli $(n+2)(n+3) = 90$, $n = 7$.

34 ODP. $\frac{9}{25}$

WSK. Skorzystaj ze wzoru:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Zauważ, że nie musisz liczyć $|\Omega|$, lecz tylko moce zdarzeń B oraz $A \cap B$ (A i B).

szkic $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5^2 = 150$ (dwie piątki, na pozostałych miejscach nie-piątki). $|A \cap B| = \binom{4}{2} (5^2 - 4^2) = 54$ (wśród dwu pozostałych rzutów co najmniej jedna szóstka). $P = \frac{54}{150} = \frac{9}{25}$.