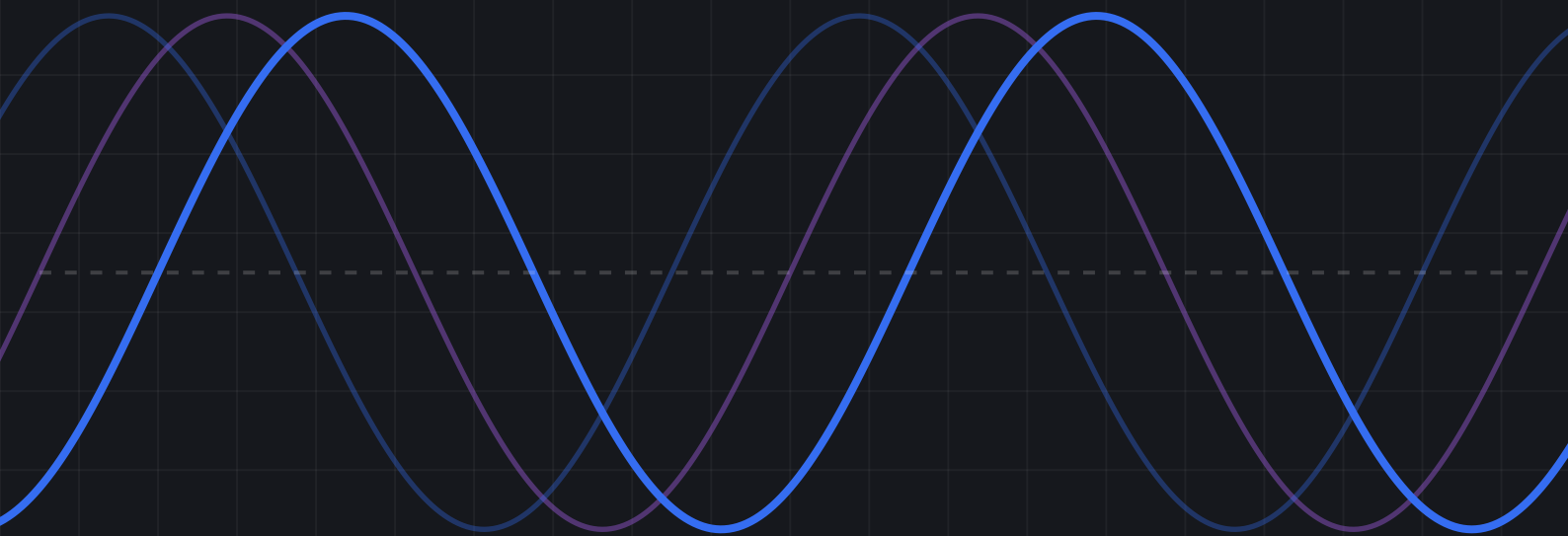




DOWODY

PODZIELNOŚCI

Zadania z matur i ze zbioru zadań CKE · poziom rozszerzony

Od najłatwiejszego do najtrudniejszego · z kluczem

ZAWARTOŚĆ ZBIORU

9 ZADAŃ

R



TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

 [Zobacz kurs](#) 

DODATKOWE MATERIAŁY

 [Wszystkie materiały](#) 

 [Autorskie arkusze próbne](#) 

 [Krótkie filmy](#) 

 [Dłuższe filmy](#) 

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

 [Dołącz](#)

O tym zestawie

W tym pliku są **dowody podzielności liczb całkowitych** na poziomie matury rozszerzonej. W arkuszach z lat 2015–2026 pojawiły się tylko **trzy** takie zadania, dlatego zestaw uzupełniają zadanie z matury z 2011 roku, zadanie z **arkusza pokazowego** z 2022 roku i cztery zadania ze **zbioru zadań CKE** do matury rozszerzonej – razem **9**. Treści pochodzą wprost z materiałów CKE i nie są zmieniane; przy każdym zadaniu stoi jego źródło i numer, a po prawej punktacja. Zadania idą **od najłatwiejszego do najtrudniejszego**.

Skąd bierze się poziom trudności

Trudność jest liczbą wyprowadzoną z **poziomu wykonania** – średniego wyniku wszystkich zdających za dane zadanie, podanego w procentach maksymalnej liczby punktów:

$$\text{trudność} = (100 - \text{poziom wykonania}) : 20$$

Dla zadań z terminów głównych matur 2015–2026 trudność jest wyznaczona na podstawie statystyk poziomu wykonania CKE, dla pozostałych – szacowana.

Jak czytać oznaczenie trudności

Trudność stoi pod każdym zadaniem w skali **od 0 do 5** – pięć kółek zamalowywanych co pół:

Niski poziom trudności ● ● ● ● ● 1/5

Średni poziom trudności ● ● ● ● ● 3/5

Wysoki poziom trudności ● ● ● ● ● 5/5

Zadania

Zadanie 1 ZBIÓR ZADAŃ CKE 2022 · ZADANIE NR 5

4 PKT

Suma liczb całkowitych x i y jest podzielna przez 3.

Wykaż, że suma sześciątów liczb x i y jest podzielna przez 9.

TRUDNOŚĆ 2,5/5



Zadanie 2 ZBIÓR ZADAŃ CKE 2022 · ZADANIE NR 2

4 PKT

Liczby a , b , c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy równej 7. Jedna z tych liczb jest wielokrotnością liczby 7.

Wykaż, że iloczyn $a \cdot b \cdot c$ jest podzielny przez 294.

TRUDNOŚĆ 3/5



Zadanie 3 MAJ 2011 · ZADANIE NR 1

4 PKT

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

TRUDNOŚĆ 3/5



Zadanie 4 LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 8

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie

$$n^5 - 3n^4 - n + 3$$

jest podzielne przez 16.

TRUDNOŚĆ 3,5/5



Zadanie 5 ARKUSZ POKAZOWY 2022 · ZADANIE NR 5

3 PKT

Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

TRUDNOŚĆ 4/5



Zadanie 6 CZERWIEC 2019 · ZADANIE NR 9

3 PKT

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie

$$n^5 - 3n^4 - n + 19$$

jest podzielne przez 16.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 7** ZBIÓR ZADAŃ CKE 2022 · ZADANIE NR 3

2 PKT

Niech a, b będą liczbami całkowitymi, dla których zachodzi równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$.

Wykaż, że jeśli 5 jest dzielnikiem liczby $a - b$, to 25 również jest dzielnikiem liczby $a - b$.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 8** MAJ 2018 · ZADANIE NR 8

3 PKT

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba

$$k^3m - km^3$$

jest podzielna przez 6.

TRUDNOŚĆ 5/5

**Zadanie 9** ZBIÓR ZADAŃ CKE 2022 · ZADANIE NR 4

2 PKT

Rozpatrzmy liczby naturalne większe od 1000, w których zapisie występuje tylko cyfra 1:

$$a = \underbrace{11 \dots 111}_n$$

Wykaż, że jeśli liczba a zapisana za pomocą n jedynek jest liczbą pierwszą, to liczba n również jest liczbą pierwszą.

TRUDNOŚĆ 5/5



Wskazówki i szkice dowodów

Numer to numer zadania w tym zestawie. Do każdego dowodu: wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic – sam klucz, bez rachunków.

1 zadanie na dowód

WSK. Zapisz $x + y = 3k$ i skorzystaj ze **wzoru skróconego mnożenia na sumę sześciannów**; wyrażenie w nawiasie wyraż przez $x + y$ oraz xy .

SZKIC $x^3 + y^3 = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = 3k(9k^2 - 3xy) = 9k(3k^2 - xy)$, a $k(3k^2 - xy)$ jest liczbą całkowitą.

2 zadanie na dowód

WSK. Zauważ, że wszystkie trzy liczby są wielokrotnościami 7. Zapisz środkową z nich jako $b = 7k$, a pozostałe wyraż przez b .

SZKIC $a = b - 7 = 7(k - 1)$ i $c = b + 7 = 7(k + 1)$, więc $abc = 7^3(k - 1)k(k + 1)$. Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych dzieli się przez 6, zatem abc dzieli się przez $49 \cdot 6 = 294$.

3 zadanie na dowód

WSK. Wylącz k^2 przed nawias, a wyrażenie w nawiasie zapisz za pomocą **wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy**. Zobacz, iloczyn jakich liczb podniesiono do kwadratu.

SZKIC $k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^2 - 1)^2$, a to kwadrat iloczynu $(k - 1)k(k + 1)$ trzech kolejnych liczb całkowitych. Ten iloczyn dzieli się przez 2 i przez 3, czyli przez 6, więc jego kwadrat dzieli się przez 36.

4 zadanie na dowód

WSK. Rozłóż dane wyrażenie na iloczyn, możesz

zacząć w następujący sposób:

$$n^5 - 3n^4 - n + 3 = n^4(n - 3) - 1 \cdot (n - 3).$$

SZKIC $(n - 3)(n^4 - 1) = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$: cztery czynniki parzyste, a jedna z liczb $n - 1$, $n + 1$ dzieli się przez 4, więc iloczyn dzieli się przez $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, tym bardziej przez 16.

5 zadanie na dowód

WSK. Wśród czterech kolejnych liczb całkowitych dokładnie jedna dzieli się przez 4, więc te trzy liczby to $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$. Oznacz środkową przez a i uprość sumę $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$.

SZKIC Suma to $3a(a^2 + 2)$, gdzie $a = 4k + 2$. Oba czynniki a i $a^2 + 2$ są parzyste, więc suma dzieli się przez 4. Gdy $3 \mid a$, przez 9 dzieli się już $3a$; gdy nie, a^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, więc $3 \mid a^2 + 2$ – i znów suma dzieli się przez 9. Liczby 4 i 9 są względnie pierwsze, zatem suma dzieli się przez 36.

6 zadanie na dowód

WSK. Zauważ, że liczba całkowita k jest podzielna przez 16, gdy różnica $k - 16$ też jest podzielna przez 16. Dlatego od wyrażenia w zadaniu można odjąć 16 i następnie rozłożyć powstały wielomian na czynniki.

SZKIC $n^5 - 3n^4 - n + 19 = (n - 3)(n^4 - 1) + 16 = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) + 16$. Dla n nieparzystego wszystkie cztery czynniki są pa-

rzyste, a z kolejnych liczb parzystych $n - 1$, $n + 1$ jedna dzieli się przez 4 – iloczyn dzieli się przez 16.

7 zadanie na dowód

WSK. Przekształć równość tak, aby po jednej stronie zostało b^2 , a drugą stronę zapisz jako iloczyn, w którym jednym z czynników jest $a - b$.

SZKIC $b^2 = 2a^2 + a - 2b^2 - b = (a - b)(2a + 2b + 1)$. Jeśli $5 \mid a - b$, to $5 \mid b^2$, więc $5 \mid b$ (bo 5 jest liczbą pierwszą), a stąd $5 \mid a$. Wtedy $2a + 2b + 1$ daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1, a $25 \mid b^2 = (a - b)(2a + 2b + 1)$ – zatem $25 \mid a - b$.

8 zadanie na dowód

WSK. Rozpisz wyrażenie z zadania na postać iloczynową. Rozbij dowód podzielności na dwie części: podzielność przez 2 (łatwiejszy)

i podzielność przez 3. Dowodząc podzielności przez 3, rozpatrz przypadki w zależności od reszt z dzielenia przez 3 (np. $k = 3n + 1 - k$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę równą 1).

SZKIC $k^3m - km^3 = km(k - m)(k + m)$. Przez 2: gdy k, m obie nieparzyste, parzyste jest $k - m$; inaczej parzyste jest km . Przez 3: gdy żadna nie dzieli się przez 3, to mają reszty 1 lub 2 – równe reszty dają $3 \mid k - m$, różne dają $3 \mid k + m$.

9 zadanie na dowód

WSK. Przeprowadź dowód nie wprost: załóż, że $n = k \cdot l$, gdzie $k, l > 1$. Zapis liczby a podzielnej na l grup po k jedynek.

SZKIC Niech b będzie liczbą zapisaną za pomocą k jedynek. Wtedy $a = b \cdot c$, gdzie $c = 1 + 10^k + 10^{2k} + \dots + 10^{k(l-1)}$, i oba czynniki są większe od 1, więc a nie jest liczbą pierwszą – sprzeczność.