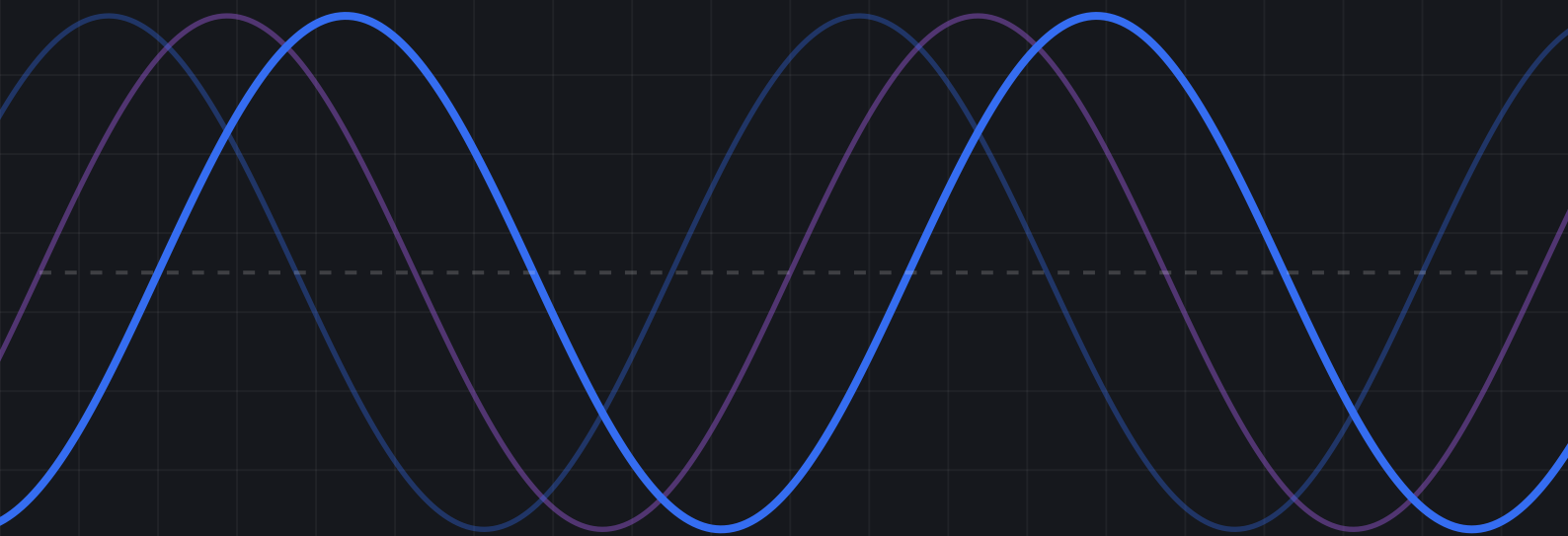




DOWODY ALGEBRAICZNE

Wszystkie zadania z matur 2015–2026 · poziom rozszerzony

Od najłatwiejszego do najtrudniejszego · z kluczem

ZAWARTOŚĆ ZBIORU

15 ZADAŃ

R



TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

 [Zobacz kurs](#) 

DODATKOWE MATERIAŁY

 [Wszystkie materiały](#) 

 [Autorskie arkusze próbne](#) 

 [Krótkie filmy](#) 

 [Dłuższe filmy](#) 

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

 [Dołącz](#)

O tym zestawie

W tym pliku są **wszystkie zadania na dowody algebraiczne**, jakie pojawiły się na maturach rozszerzonych w latach 2015–2026 – razem **15**, ze wszystkich terminów. Prawie wszystkie każą udowodnić **nierówność**, dwa – **równość**. Treści pochodzą wprost z arkuszy CKE i nie są zmieniane; przy każdym zadaniu stoi jego sesja i numer w oryginalnym arkuszu, a po prawej punktacja.

Zadania idą **od najłatwiejszego do najtrudniejszego**.

Skąd bierze się poziom trudności

Trudność jest liczbą wyprowadzoną z **poziomu wykonania** – średniego wyniku wszystkich zdających za dane zadanie, podanego w procentach maksymalnej liczby punktów:

$$\text{trudność} = (100 - \text{poziom wykonania}) : 20$$

Jak czytać oznaczenie trudności

Trudność stoi pod każdym zadaniem w skali **od 0 do 5** – pięć kółek zamalowywanych co pół:

Niski poziom trudności ● ● ● ● ● 1/5

Średni poziom trudności ● ● ● ● ● 3/5

Wysoki poziom trudności ● ● ● ● ● 5/5

Zadania

Zadanie 1 MAJ 2023 · ZADANIE NR 4

3 PKT

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność

$$x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3.$$

Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

TRUDNOŚĆ 1,5/5

**Zadanie 2** MAJ 2026 · ZADANIE NR 3

3 PKT

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}.$$

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 3** MAJ 2019 · ZADANIE NR 8

3 PKT

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y , takich, że $x < y$ i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a , prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2.$$

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 4** MAJ 2025 · ZADANIE NR 2

3 PKT

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2.$$

TRUDNOŚĆ 3,5/5



Zadanie 5 CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 5

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12.$$

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 6** CZERWIEC 2026 · ZADANIE NR 4

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$xy + x + y \leq x^2 + y^2 + 1$$

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 7** MAJ 2017 · ZADANIE NR 7

3 PKT

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0.$$

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 8** CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 7

3 PKT

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0.$$

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 9** CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 8

3 PKT

Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$.

Wykaż, że $a = 2b$.

TRUDNOŚĆ 4/5



Zadanie 10 MAJ 2022 · ZADANIE NR 6

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $2x > y$, spełniona jest nierówność

$$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3.$$

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 11** MAJ 2015 · ZADANIE NR 8

3 PKT

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 12** MAJ 2016 · ZADANIE NR 8

3 PKT

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że

$$x^2 + y^2 = 2,$$

prawdziwa jest nierówność

$$x + y \leq 2.$$

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 13** CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 6

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x \neq y$ spełniona jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2).$$

TRUDNOŚĆ 4/5



Zadanie 14 CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 5

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}.$$

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 15** CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 8

4 PKT

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}.$$

TRUDNOŚĆ 4,5/5



Wskazówki i szkice dowodów

Numer to numer zadania w tym zestawie. Do każdego dowodu: wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic – sam klucz, bez rachunków.

1 zadanie na dowód

WSK. Przenieś wszystkie wyrazy nierówności na jedną stronę i rozłóż otrzymane wyrażenie na czynniki, stosując metodę grupowania wyrazów oraz **wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów**. Następnie w otrzymanej nierówności wykorzystaj warunek $x + y = 4$.

SZKIC Nierówność to $(x - y)^2(x + y) \leq 0$; skoro $x + y = 4 > 0$, musi być $(x - y)^2 \leq 0$, czyli $x = y = 2$.

2 zadanie na dowód

WSK. Pomnóż przez $x^2y^2 > 0$, a prawą stronę rozłóż wzorem na sumę sześciątów.

SZKIC Po pomnożeniu: $xy(x + y) \leq x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, czyli $0 \leq (x + y)(x - y)^2$.

3 zadanie na dowód

WSK. Pomnóż nierówność przez mianowniki, aby pozbyć się ułamków. Następnie przenieś wszystkie wyrazy na jedną stronę i spróbuj wyodrębnić kwadrat różnicy $(x - y)^2$.

SZKIC Po pomnożeniu przez $x(y + a) > 0$ i uporządkowaniu: $(x - y)^2 + a(y - x) > 0$ – oba składniki dodatnie, bo $y > x$.

4 zadanie na dowód

WSK. Wyłącz $8ab$ przed nawias po prawej stronie nierówności. Następnie przenieś wyrażenie po prawej stronie na lewą stronę i wyłącz

$(a + 2b)$ przed nawias.

SZKIC $(a + 2b)^3 - 8ab(a + 2b) = (a + 2b)((a + 2b)^2 - 8ab) = (a + 2b)(a - 2b)^2 > 0$, bo $a + 2b > 0$ i $a \neq 2b$.

5 zadanie na dowód

WSK. Przenieś wszystkie wyrazy na lewą stronę i sprowadź ułamki do wspólnego mianownika. Otrzymasz w liczniku wielomian trzeciego stopnia. Znajdź jego pierwiastek całkowity (szukając wśród dzielników wyrazu wolnego), a następnie rozłóż ten wielomian na czynniki.

SZKIC Dla $a > 0$ równoważnie $a^3 - 12a + 16 \geq 0$; $a = 2$ jest pierwiastkiem podwójnym: $a^3 - 12a + 16 = (a - 2)^2(a + 4) \geq 0$.

6 zadanie na dowód

WSK. Pomnóż obie strony przez 2 i zwiń wszystko w trzy kwadraty.

SZKIC $2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$.

7 zadanie na dowód

WSK. Rozbij składnik $-8xy$ na dwa wyrażenia i pogrupuj wyrazy tak, aby skorzystać ze **wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy**:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

SZKIC Lewa strona to $(xy - 2)^2 + 2(x - y)^2$; drugi składnik jest dodatni, bo $x \neq y$.

8 zadanie na dowód

WSK. Rozbij wyraz $5x^2$ na sumę $4x^2 + x^2$ i pogrupuj wyrazy tak, aby skorzystać ze **wzórów skróconego mnożenia na kwadrat różnicy i kwadrat sumy**.

SZKIC $5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 = (2x - y)^2 + (x + 3)^2 \geq 0$.

9 zadanie na dowód

WSK. Zapisz równość w postaci:

$$a^2 - 4b^2 = 4b - 2a.$$

Następnie dla lewej strony zastosuj **wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów**.

SZKIC $a^2 - 4b^2 = 4b - 2a \iff (a - 2b)(a + 2b) + 2(a - 2b) = 0 \iff (a - 2b)(a + 2b + 2) = 0$; drugi czynnik jest dodatni, więc $a = 2b$.

10 zadanie na dowód

WSK. Przenieś wszystkie wyrazy na jedną stronę nierówności i pogrupuj je tak, aby móc wyłączyć wspólny czynnik przed nawias. Następnie skorzystaj ze **wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów**:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Na końcu przeanalizuj znaki otrzymanych czynników, korzystając z założenia $2x > y$.

SZKIC $8x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - y^3 = (2x + y)(4x^2 - y^2) = (2x + y)^2(2x - y) \geq 0$, bo $2x - y > 0$.

11 zadanie na dowód

WSK. Rozpisz wyrażenie z zadania w następujący sposób:

$$x^4 - 2x^2 + x^2 - 2x + 1 + 1 + 1$$

i skorzystaj ze **wzórów skróconego mnożenia**.

SZKIC $x^4 - x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2 + 1 \geq$

$$1 > 0.$$

12 zadanie na dowód

WSK. Możesz rozwiązać to zadanie **metodą algebraiczną** wyznaczając y z pierwszego równania. Weź pod uwagę, że $y > 0$ i napisz odpowiednie założenia na x .

SZKIC $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2 + 2xy \leq 2 + (x^2 + y^2) = 4$, bo $2xy \leq x^2 + y^2$; dla dodatnich x, y stąd $x + y \leq 2$.

13 zadanie na dowód

WSK. Przenieś wszystkie wyrazy na jedną stronę nierówności i pogrupuj je tak, aby wyłączyć wspólny czynnik. Następnie skorzystaj ze **wzoru skróconego mnożenia na różnicę sześcianów**:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Na końcu przeanalizuj znaki otrzymanych czynników.

SZKIC Różnica stron to $(x - y)(x^3 - y^3) = (x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$, a $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ dla $x \neq y$.

14 zadanie na dowód

WSK. Wykorzystaj równość $a + b = 1$, aby wyznaczyć jedną zmienną za pomocą drugiej (np. $b = 1 - a$), i wstaw ją do nierówności. Następnie przekształć nierówność tak, aby skorzystać ze **wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy**. Pamiętaj o założeniach!

SZKIC Z $b = 1 - a$ (i $a \in (0, 1)$): $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2-a} = \frac{3}{(a+1)(2-a)} \geq \frac{4}{3} \iff 9 \geq 4(a+1)(2-a) \iff (2a-1)^2 \geq 0$.

15 zadanie na dowód

WSK. Zacznij od podniesienia obustronnie nierówności do kwadratu (można tak postąpić,

bo obie strony są nieujemne).

SZKIC Obie strony dodatnie – po podniesieniu

do kwadratu zostaje $ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$, czyli
 $\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$.