



# KOMBINATORYKA

## I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Kombinatoryka i prawdopodobieństwo · matura rozszerzona

ZAKRES

**MATURY 2015–2026**

# 07



#### TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



#### DARMOWY KURS · YOUTUBE

## Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

 [Zobacz kurs](#) 

#### DODATKOWE MATERIAŁY

 [Wszystkie materiały](#) 

 [Autorskie arkusze próbne](#) 

 [Krótkie filmy](#) 

 [Dłuższe filmy](#) 

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

 [Dołącz](#)

# Spis treści

---

|           |                                                         |           |
|-----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.</b> | Niezbędnik kombinatoryki .....                          | <b>4</b>  |
|           | Reguła mnożenia i permutacje .....                      | 4         |
|           | Litery, które się powtarzają .....                      | 5         |
|           | Rachunki na silniach .....                              | 6         |
|           | Wariacje, czyli metoda kratek .....                     | 6         |
|           | Kombinacje i symbol Newtona .....                       | 7         |
|           | Trójkąt Pascala i wzór dwumianowy Newtona .....         | 9         |
| <b>2.</b> | Zadania maturalne z kombinatoryki .....                 | <b>10</b> |
|           | Metoda bloków w zadaniu maturalnym .....                | 10        |
|           | Prawdopodobieństwo, które jest kombinatoryką .....      | 11        |
|           | Metoda przypadków niedozwolonych .....                  | 12        |
|           | Metoda luk .....                                        | 13        |
|           | Wybór miejsc zamiast ustawień .....                     | 14        |
|           | Jeszcze raz przypadki niedozwolone .....                | 15        |
|           | Suma wszystkich liczb .....                             | 16        |
| <b>3.</b> | Rachunek prawdopodobieństwa .....                       | <b>17</b> |
|           | Drzewko i schemat Bernoulliego .....                    | 17        |
|           | Co najwyżej jeden sukces .....                          | 18        |
|           | Drzewko w zadaniu z dwiema urnami .....                 | 19        |
|           | Prawdopodobieństwo warunkowe .....                      | 20        |
|           | Trzy orły z rzędu .....                                 | 21        |
|           | Kostka i warunek .....                                  | 22        |
|           | Zmienna losowa i wartość oczekiwana .....               | 22        |
| <b>4.</b> | Ćwiczenia .....                                         | <b>24</b> |
| <b>5.</b> | Dodatek .....                                           | <b>26</b> |
|           | Dlaczego trójkąt Pascala powstaje przez dodawanie ..... | 26        |
|           | Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym .....      | 26        |
|           | Odpowiedzi i krótkie rozwiązania .....                  | <b>27</b> |

# Niezbędnik kombinatoryki

Na maturze rozszerzonej są zadania stricte z kombinatoryki, ale też duża część zadań, które zaczynają się od słów „oblicz prawdopodobieństwo”, to w gruncie rzeczy zadania z kombinatoryki – prawdopodobieństwo jest tylko w ich sformułowaniu. Zadania stricte z rachunku prawdopodobieństwa wykorzystują **drzewko**, **schemat Bernoulliego** albo **prawdopodobieństwo warunkowe**. Ten materiał idzie tą samą drogą co lekcja: najpierw narzędzia kombinatoryki, potem zadania maturalne z kombinatoryki, na końcu rachunek prawdopodobieństwa. Każda karta z przykładem i każda ramka z zadaniem ma plakietkę z momentem w filmie.

## Reguła mnożenia i permutacje

**Silnia** liczby naturalnej  $n$  to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do  $n$ :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n,$$

a umownie  $0! = 1$ . Liczba **permutacji** zbioru  $n$ -elementowego, czyli liczba sposobów, na które można ustawić w rzędzie  $n$  różnych obiektów, jest równa  $n!$ .

### PERMUTACJE

PRZYKŁAD Z LEKCJI - 2:00

Na ile sposobów można ustawić w rzędzie 5 osób?

- I Na pierwszym miejscu może stanąć każda z 5 osób, na drugim – każda z 4 pozostałych, potem zostają 3, 2 i 1 możliwość.
- II Każdemu wyborowi pierwszej osoby odpowiadają 4 wybory drugiej – jak gałązki drzewka. Liczba wszystkich ścieżek to iloczyn:  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ .

### REGUŁA MNOŻENIA

Jeżeli pierwszy wybór można zrobić na  $a$  sposobów, a po każdym z nich drugi – na  $b$  sposobów, to oba wybory razem można zrobić na  $a \cdot b$  sposobów. Tak samo jest przy trzech i więcej kolejnych wyborach.

## METODA BLOKÓW

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 3:58

Na ile sposobów 10 osób może stanąć w kolejce tak, żeby troje znajomych  $A$ ,  $B$  i  $C$  stało obok siebie?

- I Znajomych zamykamy w jednym „worku” – **bloku**. Blok razem z 7 pozostałymi osobami to 8 obiektów, które ustawiamy na  $8!$  sposobów.
- II Wewnątrz bloku znajomi mogą się ustawić na  $3!$  sposobów.
- III Z reguły mnożenia: wszystkich ustawień jest  $8! \cdot 3!$ .

## Litery, które się powtarzają

## PERMUTACJE Z POWTÓRZENIAMI

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 6:14

Ile różnych słów – także takich, które nic nie znaczą – można ułożyć ze wszystkich 11 liter słowa MISSISSIPPI?

- I Zamiana miejscami dwóch liter S nie daje nowego słowa, więc słów jest mniej niż  $11!$ . Najpierw mały przypadek: litery  $a$ ,  $\tilde{a}$  i  $b$ . Dopóki  $a$  i  $\tilde{a}$  są rozróżnialne, słów jest  $3! = 6$ :  $a\tilde{a}b$ ,  $\tilde{a}ab$ ,  $ab\tilde{a}$ ,  $\tilde{a}ba$ ,  $ba\tilde{a}$ ,  $b\tilde{a}a$ . Gdy zapomnimy o falcie, słowa łączą się w pary:  $aab$ ,  $aba$ ,  $baa$ . Jest ich  $\frac{3!}{2!} = 3$ .
- II W słowie MISSISSIPPI udajemy najpierw, że wszystkie litery są rozróżnialne: słów byłoby  $11!$ .
- III Dzielenie przez  $4!$  „zabija” rozróżnialność czterech liter S, przez kolejne  $4!$  – czterech liter I, a przez  $2!$  – dwóch liter P:

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650.$$

Ta sama zasada działa zawsze: gdy wśród  $n$  ustawianych obiektów są grupy jednakowych, dzielimy  $n!$  przez silnie liczebności tych grup.

## Rachunki na silniach

W ilorazie dwóch silni wszystkie czynniki mianownika skracają się z licznikiem. Zostaje tyle czynników, o ile liczba w liczniku jest większa od liczby w mianowniku, a wypisujemy je od największego:

$$\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8, \quad \frac{15!}{11!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12, \quad \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1).$$

Ostatni wzór widać po rozpisaniu silni:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ , a  $(n-2)!$  to początek tego iloczynu, aż do czynnika  $n-2$ . Takie skracanie przydaje się nie tylko w kombinatoryce – w maju 2026 potrzebne było w zadaniu z granic ciągów.

## Wariacje, czyli metoda kratek

Wzorów na wariacje nie trzeba pamiętać. Rysujemy tyle kratek, ile miejsc ma tworzony ciąg, w każdą wpisujemy liczbę możliwości i wszystko mnożymy. **Wariacja z powtórzeniami** to ciąg, którego wyrazy mogą się powtarzać, **wariacja bez powtórzeń** – ciąg o różnych wyrazach. Zadań o liczbach wielocyfrowych z warunkami na cyfry jest na maturze dużo i prawie wszystkie rozwiązuje się właśnie kratkami.

### WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 17:33

Cztery osoby wsiadają do windy na parterze, a każda wysiada na jednym z 10 pięter. Na ile sposobów mogą to zrobić?

- I Patrzymy na osoby, a nie na piętra: każda z czterech osób ma do wyboru 10 pięter, bez względu na wybory pozostałych.
- II Z reguły mnożenia:  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$  sposobów.

## WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 19:49

Ile jest liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, zapisanych za pomocą cyfr od 1 do 9?

- I Na pierwszym miejscu jest 9 możliwości – zera wśród cyfr nie ma, więc nie ma z nim kłopotu. Na każdym następnym miejscu możliwości jest o jedną mniej:  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$ .
- II Ze wzoru na wariacje byłoby  $\frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!}$  – po skróceniu to samo, ale kratki prowadzą do wyniku szybciej.

## Kombinacje i symbol Newtona

Symbol Newtona  $\binom{n}{k}$  (czytamy: „ $n$  po  $k$ ”) to liczba  **$k$ -elementowych podzbiorów** zbioru  $n$ -elementowego, czyli liczba sposobów, na które z  $n$  elementów można **wybrać  $k$** , gdy **kolejność nie ma znaczenia**. Po angielsku  $\binom{5}{3}$  czyta się „5 choose 3” – „z pięciu wybierz trzy” – i to dobrze oddaje, o co chodzi.

## KOMBINACJE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 23:06

Z 10 osób wybieramy trzyosobową delegację. Dlaczego  $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ ?

- I W delegacji kolejność nie ma znaczenia – liczy się tylko to, kto do niej należy.
- II Wybierając trzy osoby do delegacji, wybieramy zarazem siedem osób, które w niej nie będą. Wyborów jednego i drugiego rodzaju jest więc tyle samo.

## WŁASNOŚCI SYMBOLU NEWTONA

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Podzbiór zeroelementowy jest jeden – zbiór pusty, bo jest podzbiorem każdego zbioru. Podzbiór  $n$ -elementowy też jest jeden – cały zbiór. Dla zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  mamy więc  $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$  i  $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$ .

## TURNIEJ BEZ REWANŻÓW

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 28:06

W turnieju szachowym gra  $n$  zawodników, każdy z każdym jedną partię. Ile partii zostanie rozegranych?

I Rysujemy tabelę  $n \times n$ : kratka w wierszu  $i$  i kolumnie  $j$  to partia zawodników  $i$  i  $j$ . Wszystkich kretek jest  $n^2$ .

II Nikt nie gra sam ze sobą, więc odpada przekątna, czyli  $n$  kretek. Kratki nad przekątną i pod nią opisują te same partie, więc dzielimy przez 2:

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

III Inaczej: pod przekątną jest  $1 + 2 + \dots + (n-1)$  kretek. Wzór na sumę ciągu arytmetycznego daje ten sam wynik.

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |

## SKĄD SIĘ BIERZE WZÓR

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 33:39

Dlaczego  $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$ ?

I Kratki: trzy elementy wybrane po kolei to  $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$  możliwości – wariacja bez powtórzeń, w której kolejność ma znaczenie.

II W podzbiorze kolejność nie ma znaczenia, a te same trzy elementy ustawiliśmy na  $3!$  sposobów. Dzielimy przez  $3!$ :  $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$ .

III Ogólnie:  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Ostatni czynnik to  $n - k + 1$ , tak jak  $8 = 10 - 3 + 1$ .

## SYMBOL NEWTONA

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Drugi wzór warto pamiętać, bo „po 2” pojawia się w zadaniach bardzo często, a liczy się je w pamięci:  $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ ,  $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ .

## Trójkąt Pascala i wzór dwumianowy Newtona

Zapiszmy kwadrat i sześćcian sumy ze wszystkimi wykładnikami:

$$(a+b)^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3.$$

W każdym składniku wykładniki sumują się do potęgi, do której podnosimy. Dlatego w rozwinięciu  $(a+b)^{10}$  współczynnik przy  $a^3b^8$  jest równy 0 – takiego składnika w ogóle nie ma, bo  $3+8=11$ .

Współczynniki 1, 2, 1 i 1, 3, 3, 1 to wiersze **trójkąta Pascala**. Na brzegach stoją jedynki, a każda liczba w środku jest sumą dwóch liczb nad nią. Liczby w wierszu  $n$  to kolejne symbole Newtona  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ .

|         |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|
| $n = 0$ |   |   |   |   | 1 |
| $n = 1$ |   |   | 1 | 1 |   |
| $n = 2$ |   | 1 | 2 | 1 |   |
| $n = 3$ | 1 | 3 | 3 | 1 |   |
| $n = 4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

Z czwartego wiersza odczytujemy  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ . Trójkąt jest symetryczny, bo  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ : wybrać jedną osobę z czterech to to samo, co wybrać trzy, więc  $\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$ .

## WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n.$$

## Zadania maturalne z kombinatoryki

Siedem zadań z matur, a przy każdym inna technika zliczania: metoda bloków, wybór miejsc dla cyfr, metoda przypadków niedozwolonych, metoda luk i tabela wszystkich liczb. Cztery z tych zadań mówią o prawdopodobieństwie, ale ich sercem jest kombinatoryka – liczymy zdarzenia sprzyjające i dzielimy przez liczbę wszystkich możliwości.

### Metoda bloków w zadaniu maturalnym

CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 2

W FILMIE 45:44

3 PKT

Wśród  $n$  osób są Ania i jej dwaj znajomi. Wszystkie te  $n$  osób ustawiamy w kolejkę jedna za drugą. Liczba wszystkich takich ustawień jest 12 razy większa od liczby wszystkich takich ustawień tych  $n$  osób w kolejkę, w których Ania i jej dwaj znajomi zajmują trzy kolejne miejsca (w dowolnej kolejności).

**Oblicz  $n$ . Zapisz obliczenia.**

**Na co zwrócić uwagę.** Ania i jej znajomi należą do tych  $n$  osób – poza blokiem zostaje  $n - 3$  osób, a nie  $n$ .

Wszystkich ustawień  $n$  osób w kolejce jest  $n!$ . Ustawień, w których Ania i jej dwaj znajomi stoją obok siebie, liczymy metodą bloków: blok i  $n - 3$  pozostałych osób to  $n - 2$  obiekty, które ustawiamy na  $(n - 2)!$  sposobów, a w bloku troje znajomych ustawia się na  $3!$  sposobów. Stąd równanie, w którym  $n \geq 3$ :

$$n! = 12 \cdot (n - 2)! \cdot 3!.$$

Dzielimy obie strony przez  $(n - 2)!$  – po lewej zostają dwa czynniki,  $n$  i  $n - 1$ :

$$n(n - 1) = 12 \cdot 6 = 72.$$

Można rozwiązać to równanie kwadratowe, ale szybciej jest zgadnąć:  $72 = 9 \cdot 8$ , więc  $n = 9$ . Innego rozwiązania naturalnego nie ma, bo iloczyn  $n(n - 1)$  rośnie razem z  $n$ . Odpowiedź:  $n = 9$ .

## Prawdopodobieństwo, które jest kombinatoryką

CZERWIEC 2018 · ZADANIE NR 9

W FILMIE 52:19

4 PKT

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru  $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ , losujemy jedną.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.**

**Na co zwrócić uwagę.** W zbiorze cyfr jest zero, ale nie ma dwójki – sumy 3 nie da się więc złożyć jako  $1 + 2$ .

Gdyby to było zadanie z kombinatoryki, pytanie brzmiałoby: ile jest takich liczb o sumie cyfr 3? Tak je też rozwiązujemy, a na końcu dzielimy przez liczbę wszystkich możliwości.

**Wszystkie możliwości.** Na pierwszym miejscu nie może stać zero, więc mamy tam 5 cyfr do wyboru, a na każdym z siedmiu kolejnych miejsc – 6:

$$|\Omega| = 5 \cdot 6^7.$$

**Zdarzenia sprzyjające.** Suma cyfr 3 wymaga albo jednej trójki i samych zer, albo trzech jedynek i zer. W pierwszym przypadku trójka musi stać na początku: 30 000 000, czyli 1 możliwość. W drugim przypadku jedynka stoi na początku, a na pozostałych siedmiu miejscach wybieramy dwa miejsca dla jedynek – kolejność nie ma znaczenia, bo jedynki są nierozróżnialne – resztę wypełniają zera:  $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$  możliwości. Przypadki są rozłączne, więc  $|A| = 1 + 21 = 22$  oraz

$$P(A) = \frac{22}{5 \cdot 6^7} = \frac{11}{699\,840}.$$

## Metoda przypadków niedozwolonych

CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 13

POZIOM WYKONANIA 20%

W FILMIE 58:34

4 PKT

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

**Na co zwrócić uwagę.** Rozwiązanie wprost wymaga trzech przypadków – co stoi na pierwszym miejscu: jedynka, dwójka czy inna cyfra różna od zera.

### METODA PRZYPADKÓW NIEDOZWOLONYCH

Liczymy wszystkie ciągi cyfr, **dopuszczając zero na początku**, a potem odejmujemy te, które **zaczynają się od zera**. Złe ciągi liczy się łatwo – to to samo zadanie dla ciągu krótszego o jedno miejsce.

**Zero może stać na początku.** Z siedmiu miejsc wybieramy trzy dla jedynek:  $\binom{7}{3}$ . Z czterech wolnych miejsc wybieramy dwa dla dwójek:  $\binom{4}{2}$ . Na dwóch ostatnich miejscach może stać każda cyfra poza jedyneką i dwójką, czyli jedna z ośmiu:  $8^2$ . Razem  $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$ .

**Złe przypadki: zero na początku.** Zero zajmuje pierwsze miejsce, a na sześciu pozostałych postępujemy tak samo:  $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$ .

**Wynik.** Od wszystkich odejmujemy złe. Zamiast wymnażać, wyłączamy wspólne czynniki przed nawias:

$$\begin{aligned} \binom{7}{3} \binom{4}{2} \cdot 8^2 - \binom{6}{3} \binom{3}{2} \cdot 8 &= 35 \cdot 6 \cdot 8^2 - 20 \cdot 3 \cdot 8 = 5 \cdot 8 (7 \cdot 6 \cdot 8 - 4 \cdot 3) \\ &= 40 \cdot 12 \cdot (7 \cdot 4 - 1) = 40 \cdot 12 \cdot 27 = 12\,960. \end{aligned}$$

## Metoda luk

MAJ 2018 · ZADANIE NR 9

POZIOM WYKONANIA 23%

W FILMIE 1:08:09

4 PKT

Z liczb ośmioelementowego zbioru  $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$  tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

**Na co zwrócić uwagę.** W zbiorze  $Z$  nie ma ósemki – liczby parzyste są tylko trzy: 2, 4 i 6.

Wszystkich ciągów jest  $|\Omega| = 8!$ . Wypisywanie, gdzie mogą stać liczby parzyste, a gdzie nieparzyste, to droga przez mękę – takich układów jest 20. Szybciej jest tak: ustawiamy pięć liczb nieparzystych jak **murki**, a parzyste wciskamy w **luki** między nimi albo na brzegach:

$$\square N \square N \square N \square N \square N \square$$

Luk jest sześć, a w każdej może stanąć co najwyżej jedna liczba parzysta, bo dwie w jednej luce byłyby sąsiadami. Trzy luki z sześciu wybieramy na  $\binom{6}{3} = 20$  sposobów. W każdym takim układzie liczby parzyste ustawiamy na  $3!$  sposobów, a nieparzyste na  $5!$ . Zatem

$$P(A) = \frac{20 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{20 \cdot 6}{6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{5}{14}.$$

## Wybór miejsc zamiast ustawień

MAJ 2026 · ZADANIE NR 2

POZIOM WYKONANIA 37%

W FILMIE 1:14:31

3 PKT

Ze zbioru ośmiu liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  losujemy bez zwracania osiem razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg zgodnie z kolejnością losowania.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że wylosowane liczby utworzą ciąg, w którym iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów będzie liczbą podzielną przez 3.** Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. **Zapisz obliczenia.**

**Na co zwrócić uwagę.** Losowanie bez zwracania ośmiu liczb z ośmiu to po prostu ustawienie ich w losowej kolejności.

Wśród liczb od 1 do 8 przez 3 dzielą się tylko 3 i 6. Iloczyn trzech kolejnych wyrazów dzieli się przez 3 wtedy, gdy jest wśród nich trójka albo szóstka. Pierwsze trzy wyrazy muszą więc zawierać jedną z tych liczb, a ostatnie trzy – drugą. Wyrazy trzeci, czwarty i piąty też muszą zawierać jedną z nich, a może to być tylko ta z początku – stoi więc na **trzecim miejscu**. Tak samo wyrazy czwarty, piąty i szósty wymuszają **szóste miejsce** dla drugiej liczby.

**Sposób I.**  $|\Omega| = 8!$ . Liczby 3 i 6 ustawiamy na miejscach trzecim i szóstym na 2 sposoby, a pozostałe sześć liczb na pozostałych miejscach na  $6!$  sposobów:

$$P(A) = \frac{2 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7 \cdot 8} = \frac{1}{28}.$$

**Sposób II.** Liczy się tylko to, które dwa miejsca zajmą liczby podzielne przez 3. Za  $\Omega$  bierzemy więc wybory dwóch miejsc z ośmiu:  $|\Omega| = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ , a dobry wybór jest jeden. Znowu  $P(A) = \frac{1}{28}$ .

## Jeszcze raz przypadki niedozwolone

MAJ 2024 · ZADANIE NR 6

POZIOM WYKONANIA 18%

W FILMIE 1:20:10

3 PKT

Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

**Na co zwrócić uwagę.** Zero jest cyfrą parzystą – dlatego zero na początku to dokładnie ten kłopot, który trzeba odjąć.

**Zero może stać na początku.** Z pięciu miejsc wybieramy trzy dla cyfr nieparzystych:  $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ . Pozostałe dwa miejsca same przypadają cyfrom parzystym. Cyfry nie mogą się powtarzać, więc nieparzyste ustawiamy na  $5 \cdot 4 \cdot 3$  sposobów, a parzyste na  $5 \cdot 4$ . Razem  $10 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3$ .

**Złe przypadki: zero na początku.** Z czterech pozostałych miejsc wybieramy trzy dla nieparzystych:  $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ . Nieparzyste ustawiamy na  $5 \cdot 4 \cdot 3$  sposobów, a na ostatnie wolne miejsce zostają cztery cyfry parzyste – bez zera. Razem  $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 5 \cdot 4^3 \cdot 3$ .

**Wynik.** Rozkładamy na czynniki pierwsze i wyłączamy przed nawias, co się da:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3 - 5 \cdot 4^3 \cdot 3 &= 5^3 \cdot 2^5 \cdot 3 - 5 \cdot 2^6 \cdot 3 = 5 \cdot 2^5 \cdot 3 (5^2 - 2) \\ &= 480 \cdot 23 = 11\,040. \end{aligned}$$

## Suma wszystkich liczb

MAJ 2019 · ZADANIE NR 6

POZIOM WYKONANIA 36%

W FILMIE 1:28:56

3 PKT

Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry.

**Oblicz sumę wszystkich takich liczb.**

**Na co zwrócić uwagę.** Te liczby nie tworzą ciągu arytmetycznego – wzór na sumę ciągu nic tu nie da.

Takich liczb jest  $5! = 120$ . Wpiszmy je wszystkie do tabeli: najpierw  $4!$  liczb z jedyneką na początku, potem  $4!$  z trójką na początku i tak dalej. W pierwszej kolumnie każda cyfra stoi więc dokładnie  $4!$  razy, a z symetrii – także w każdej innej kolumnie. Na mniejszym przykładzie z cyframi 1, 3, 5: liczby 135, 153, 315, 351, 513, 531 mają w każdej kolumnie po dwie jedynki, dwie trójki i dwie piątki.

Suma cyfr w jednej kolumnie to

$$4! \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 24 \cdot 25 = 600.$$

Kolumny to kolejne rzędy: dziesiątki tysięcy, tysiące, setki, dziesiątki i jedności. Suma wszystkich liczb jest więc równa

$$600 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 600 \cdot 11\,111 = 6\,666\,600.$$

# Rachunek prawdopodobieństwa

Zadania stricte z rachunku prawdopodobieństwa wykorzystują na maturze drzewko, schemat Bernoulliego – szczególny rodzaj drzewka – albo prawdopodobieństwo warunkowe, które maturzystom idzie wyjątkowo słabo. Na końcu rozdziału jest zmienna losowa i wartość oczekiwana – temat ponad to, co zwykle pojawia się na maturze.

## Drzewko i schemat Bernoulliego

Na drzewku każda gałąź to jeden możliwy przebieg doświadczenia. Prawdopodobieństwa **mnożymy wzdłuż gałęzi**, a wyniki gałęzi sprzyjających zdarzeniu **dodajemy**. Przy dwóch rzutach symetryczną monetą wynik „orzeł i reszka w dowolnej kolejności” dają dwie gałęzie:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

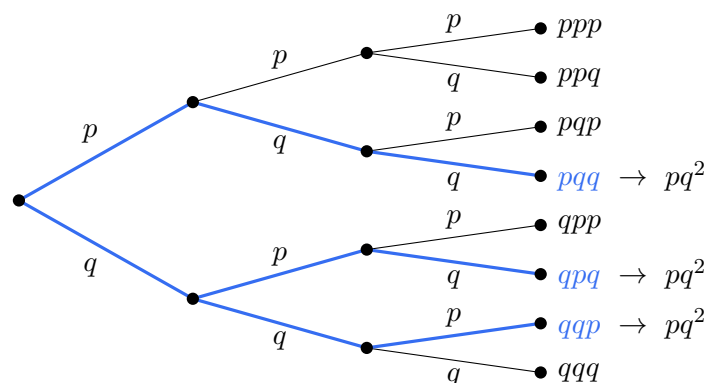
W **schemacie Bernoulliego** powtarzamy  $n$  razy to samo doświadczenie o dwóch wynikach: **sukces** z prawdopodobieństwem  $p$  i **porażka** z prawdopodobieństwem  $q = 1 - p$ . Sukces to po prostu to, co liczymy – choćby uszkodzenie pralki w transporcie.

### SCHEMAT BERNOULLIEGO

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 1:40:51

Pralka ulega uszkodzeniu w transporcie z prawdopodobieństwem  $p$ , na przykład  $p = 0,05$ , a wtedy  $q = 0,95$ . Wieziemy ją trzy razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uszkodzi się dokładnie raz?

- I Na drzewku każdy transport rozgałęzia się na dwie gałązki,  $p$  i  $q$ . Dobre są gałęzie z jednym  $p$ :  $pqq$ ,  $qpq$  i  $qqp$ .
- II Na każdej z nich iloczyn jest taki sam:  $p \cdot q \cdot q = pq^2$ .
- III Dobrych gałęzi jest tyle, na ile sposobów można wybrać jedno miejsce na sukces spośród trzech:  $\binom{3}{1} = 3$ . Szukane prawdopodobieństwo to  $3pq^2$ .

**SCHEMAT BERNOULLIEGO**

Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie  $k$  sukcesów w  $n$  próbach, gdy prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest równe  $p$ , wynosi

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Każda dobra gałąź ma  $k$  sukcesów i  $n - k$  porażek, więc daje  $p^k q^{n-k}$ , a dobrych gałęzi jest tyle, na ile sposobów można wybrać  $k$  miejsc na sukcesy spośród  $n$ . Dla  $n = 10$  i  $k = 3$  jest ich  $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$  – równie dobrze można wybierać miejsca na porażki.

**Co najwyżej jeden sukces**

MAJ 2024 · ZADANIE NR 3

POZIOM WYKONANIA 47%

W FILMIE 1:45:21

3 PKT

W pewnym zakładzie mleczarskim śmietana produkowana jest w 200-gramowych opakowaniach. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym opakowaniu śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu, jest równe 0,01. Kontrolę poddajemy 10 losowo wybranych opakowań ze śmietaną.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród opakowań poddanych tej kontroli będzie co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.**

**Na co zwrócić uwagę.** Gramatura opakowań i zawartość tłuszczu to tylko tło – liczą się  $p = 0,01$  i  $n = 10$ .

Sukcesem jest opakowanie, w którym śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu:  $p = 0,01$ ,  $q = 0,99$ ,  $n = 10$ . „Co najwyżej jedno” znaczy: żadnego albo dokładnie jedno. Drzewka z  $2^{10} = 1024$

gałęziami nie rysujemy, ale myślimy o nim:

- **żadnego takiego opakowania** – jedna gałąź, na której wszystkie opakowania są dobre:  $0,99^{10}$ ;
- **dokładnie jedno** – dziesięć gałęzi (złe jest pierwsze, drugie, ..., dziesiąte opakowanie), na każdej  $0,01 \cdot 0,99^9$ .

Zatem

$$P = 0,99^{10} + 10 \cdot 0,01 \cdot 0,99^9 \approx 0,996.$$

To dokładnie wzór Bernoulliego – drugi składnik to  $\binom{10}{1} \cdot 0,01^1 \cdot 0,99^9$ . Gdyby w treści stało „co najwyżej dwa”, doszedłby składnik  $\binom{10}{2} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^8$  i wtedy wzór naprawdę się przydaje.

## Drzewko w zadaniu z dwiema urnami

MAJ 2015 · ZADANIE NR 11

POZIOM WYKONANIA 58%

W FILMIE 1:51:13

4 PKT

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.**

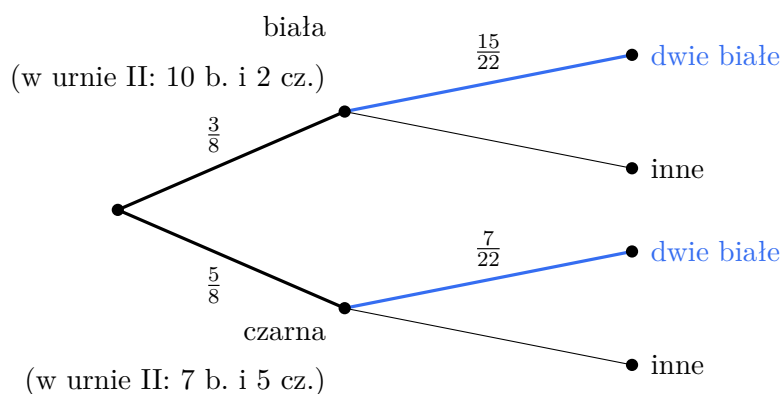
**Na co zwrócić uwagę.** Treść nie mówi o zwracaniu kul, więc dwie kule z drugiej urny losujemy naraz – kolejność nie gra roli.

Biała kula z pierwszej urny (prawdopodobieństwo  $\frac{3}{8}$ ) dokłada do drugiej urny trzy białe – jest w niej wtedy 10 białych i 2 czarne. Czarna kula ( $\frac{5}{8}$ ) dokłada trzy czarne: 7 białych i 5 czarnych. W obu przypadkach w drugiej urnie jest 12 kul.

Dwie kule z dwunastu wybieramy na  $\binom{12}{2}$  sposobów – tak, jakby kule były ponumerowane. Prawdopodobieństwo dwóch białych jest więc równe

$$\frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{10 \cdot 9}{12 \cdot 11} = \frac{15}{22} \quad \text{albo} \quad \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 11} = \frac{7}{22}.$$

Pierwszy wynik jest większy – i słusznie, bo wtedy w urnie jest więcej białych kul. Taki rzut oka to szybki test, czy rachunek ma sens.



Mnożymy wzdłuż gałęzi i dodajemy. Wspólny mianownik  $8 \cdot 22$  zostawiamy bez wymnażania – i tak się skróci:

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{15}{22} + \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{22} = \frac{45 + 35}{8 \cdot 22} = \frac{80}{8 \cdot 22} = \frac{5}{11}.$$

Drzewko to rysunek **twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym**: gałęzie pierwszego poziomu dzielą wszystkie możliwości na rozłączne przypadki, a my sumujemy wkłady tych przypadków. Samo twierdzenie jest w dodatku.

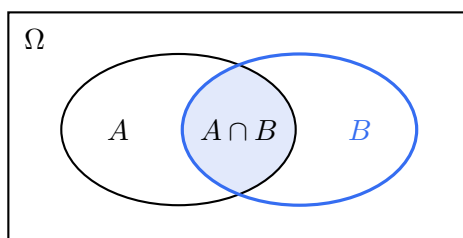
## Prawdopodobieństwo warunkowe

### PRAWDOPODOBIENSTWO WARUNKOWE

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}, \quad P(B) > 0.$$

Drugi wzór obowiązuje, gdy wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Zapis  $P(A | B)$  czytamy: „prawdopodobieństwo  $A$  pod warunkiem  $B$ ”. W treściach zadań warunek wprowadzają słowa „pod warunkiem, że” albo „jeśli wiadomo, że”. Znaczy to, że zdarzenie  $B$  **już zaszło**.  $B$  staje się nową przestrzenią  $\Omega$ , a ze zdarzenia  $A$  liczy się już tylko część wspólna  $A \cap B$  – stąd  $|B|$  w mianowniku i  $|A \cap B|$  w liczniku.



W drugim wzorze nie ma  $\Omega$ . W zadaniu z prawdopodobieństwem warunkowym moc  $\Omega$  zwykle nie jest potrzebna, a za samo jej obliczenie CKE nie przyznaje punktów.

$P(A | B)$  i  $P(B | A)$  to zupełnie różne liczby. Niech  $A$  oznacza „dostałem się na wymarzone studia”, a  $B$  – „zdałem maturę”. Wtedy  $P(B | A) = 1$ , bo kto dostał się na studia, ten zdał maturę. Za to  $P(A | B)$  może być małe – samo zdanie matury nie wystarcza.

Z definicji  $P(A | B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ , a po zamianie ról zdarzeń  $P(B | A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$ . Prawe strony są równe, więc

$$P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A).$$

To **twierdzenie Bayesa**. Na maturze rzadko się przydaje, ale dobrze pokazuje, jak oba prawdopodobieństwa warunkowe są ze sobą związane.

## Trzy orły z rzędu

CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 4

W FILMIE 2:06:47

3 PKT

Doświadczenie losowe polega na dziesięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu losowym orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, jeśli wiadomo, że wypadł dokładnie trzy razy. Zapisz obliczenia.**

**Na co zwrócić uwagę.** „Dokładnie trzy razy z rzędu” samo w sobie nie wyklucza innych orłów, ale w części wspólnej z warunkiem wątpliwości znikają: orły są dokładnie trzy i stoją obok siebie.

Niech  $A$  oznacza, że orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, a  $B$  – że wypadł dokładnie trzy razy. Szukamy  $P(A | B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$ .

**Część wspólna.** Wyniki zapisujemy jako ciągi dziesięciu liter  $O$  i  $R$ . W  $A \cap B$  są dokładnie trzy orły i stoją obok siebie:  $OOORRRRRRR$ ,  $ROOORRRRRR$ , ...,  $RRRRRRRROOO$ . Blok orłów zaczyna się na jednym z miejsc od pierwszego do ósmego, więc  $|A \cap B| = 8$ .

**Warunek.** W  $B$  wybieramy trzy miejsca na orły spośród dziesięciu, resztę wypełniają reszki. Zatem

$$|B| = \binom{10}{3} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3!} = 120, \quad P(A | B) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

## Kostka i warunek

MAJ 2025 · ZADANIE NR 4

POZIOM WYKONANIA 14%

W FILMIE 2:12:48

3 PKT

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek od jednego oczka do sześciu oczek.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.**

**Na co zwrócić uwagę.** Przy dwóch piątkach w czterech rzutach „co najmniej jeden raz sześć oczek” to jedna albo dwie szóstki – dwa rozłączne przypadki.

Niech  $A$  oznacza, że co najmniej raz wypadnie szóstka, a  $B$  – że dokładnie dwa razy wypadnie piątka. Liczymy  $P(A | B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$ .

**Część wspólna.** Najpierw wybieramy dwa rzuty z piątkami:  $\binom{4}{2} = 6$  sposobów.

- **dwie piątki i dwie szóstki** – szóstki wypełniają pozostałe dwa rzuty: 6 możliwości;
- **dwie piątki, jedna szóstka i jeszcze inny wynik** – szóstkę stawiamy w jednym z dwóch wolnych rzutów, a w drugim może wypaść wszystko poza piątką i szóstką:  $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$  możliwości.

Razem  $|A \cap B| = 6 + 48 = 54$ .

**Warunek.** Dwa rzuty z piątkami wybieramy na  $\binom{4}{2} = 6$  sposobów, a w każdym z dwóch pozostałych może wypaść wszystko poza piątką:  $|B| = 6 \cdot 5^2 = 150$ . Zatem

$$P(A | B) = \frac{54}{150} = \frac{9}{25}.$$

## Zmienna losowa i wartość oczekiwana

To już temat ponad potrzeby matury, ale warto wiedzieć, o co chodzi. **Zmienna losowa** to funkcja, której dziedziną jest przestrzeń  $\Omega$ : każdemu zdarzeniu elementarnemu przypisuje liczbę. Spotkaliśmy ją już w schemacie Bernoulliego –  $X$  w zapisie  $P(X = k)$  liczy sukcesy.

## GRA W MONETĘ

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:22:12

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Za każdego orła wygrywamy 5 zł, za każdą reszkę tracimy 10 zł. Zmienna  $X$  to wynik gry – na przykład  $X(R, O, R) = -10 + 5 - 10 = -15$ . Ile średnio wygrywamy?

- I  $|\Omega| = 2^3 = 8$ . Trzy reszki dają  $-30$  zł, a trzy orły  $15$  zł – po jednej gałęzi. Dwie reszki i orzeł to  $-15$  zł, reszka i dwa orły to  $0$  zł – po trzy gałęzie, bo reszka albo orzeł może wypaść w każdym z trzech rzutów.
- II Tabela rozkładu zmiennej  $X$  – prawdopodobieństwa sumują się do 1:

|       |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | $-30$         | $-15$         | $0$           | $15$          |
| $p_i$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

- III Wartość oczekiwana to suma iloczynów  $x_i \cdot p_i$ :

$$EX = \frac{1}{8} \cdot (-30) + \frac{3}{8} \cdot (-15) + \frac{3}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 15 = \frac{-30 - 45 + 15}{8} = -\frac{15}{2}.$$

Średnio tracimy 7,50 zł na grę.

Wartość oczekiwana to **średnia ważona**, w której wagami są prawdopodobieństwa. Gdybyśmy zagrali 800 razy, mniej więcej 100 razy stracilibyśmy 30 zł, 300 razy  $-15$  zł, 300 razy wyszlibyśmy na zero i 100 razy wygralibyśmy 15 zł. Średni wynik jednej gry byłby bliski  $-7,50$  zł, a po 100 grach bylibyśmy około 750 zł na minusie. Grę nazywamy **uczciwą**, gdy jej wartość oczekiwana jest równa 0. Każda gra w kasynie ma dla gracza wartość oczekiwaną ujemną – inaczej kasyna by nie zarabiała.

# 4

## Ćwiczenia

---

- 1 Na ile sposobów można ustawić w rzędzie 8 osób tak, żeby Ola i Ela stały obok siebie?
- 2 Ile różnych słów – także takich, które nic nie znaczą – można ułożyć ze wszystkich liter słowa MATEMATYKA?
- 3 Oblicz albo uprość.
- a)  $\frac{12!}{9!}$                       b)  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$
- 4 Do windy na parterze ośmiopiętrowego budynku wsiada 5 osób. Każda wysiada na jednym z pięter od 1 do 8. Na ile sposobów osoby mogą wysiąść:
- a) bez żadnych ograniczeń,
- b) tak, żeby każda wysiadła na innym piętrze?
- 5 W turnieju każdy zawodnik rozegrał z każdym innym dokładnie jedną partię. Rozegrano 66 partii. Ilu zawodników brało udział w turnieju?
- 6 Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie dwie cyfry 5 i dokładnie dwie cyfry 0.
- 7 Na ile sposobów można ustawić w rzędzie 4 chłopców i 3 dziewczynki tak, żeby żadne dwie dziewczynki nie stały obok siebie?
- 8 Wyznacz współczynnik przy  $x^2y^3$  w rozwinięciu wyrażenia  $(x+2y)^5$ .
- 9 Koszykarz trafia do kosza w pojedynczym rzucie z prawdopodobieństwem 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 5 rzutach trafi co najmniej 4 razy. Wynik podaj w zaokrągleniu do części tysięcznych.

**10** W pierwszej urnie są 2 kule białe i 3 czarne, a w drugiej 4 białe i 1 czarna. Rzucamy symetryczną monetą: gdy wypadnie orzeł, losujemy kulę z pierwszej urny, a gdy reszka – z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

**11** Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek jest równa 8, jeśli wiadomo, że w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek.

**12** Rzucamy raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Gdy wypadnie szóstka, wygrywamy 20 zł, a w przeciwnym razie płacimy 5 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej. Czy ta gra jest uczciwa?

## Dodatek

### Dlaczego trójkąt Pascala powstaje przez dodawanie

Każda liczba w środku trójkąta jest sumą dwóch liczb nad nią, czyli

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Podzbiory  $k$ -elementowe zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  dzielą się na dwie grupy. Te, które **zawierają** element  $n$ , powstają przez dobranie do niego  $k-1$  elementów spośród  $n-1$  pozostałych – jest ich  $\binom{n-1}{k-1}$ . Te, które **nie zawierają** elementu  $n$ , to po prostu  $k$ -elementowe podzbiory zbioru  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  – jest ich  $\binom{n-1}{k}$ . Grupy są rozłączne, więc liczby się dodają.

### Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

#### PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE

Jeżeli zdarzenia  $B_1, B_2, \dots, B_m$  są parami rozłączne, mają dodatnie prawdopodobieństwa i razem dają całą przestrzeń  $\Omega$ , to dla każdego zdarzenia  $A$

$$P(A) = P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + \dots + P(A | B_m) P(B_m).$$

Na drzewku zdarzenia  $B_1, \dots, B_m$  to gałęzie pierwszego poziomu, a iloczyn  $P(A | B_i) P(B_i)$  to iloczyn prawdopodobieństw wzdłuż gałęzi, która prowadzi przez  $B_i$  do  $A$ . W zadaniu z dwiema urnami  $B_1$  i  $B_2$  to wylosowanie z pierwszej urny kuli białej i czarnej, a  $P(A | B_1) = \frac{15}{22}$ ,  $P(A | B_2) = \frac{7}{22}$ . Twierdzenie wynika wprost z definicji prawdopodobieństwa warunkowego:  $A$  dzieli się na rozłączne części  $A \cap B_i$ , a  $P(A \cap B_i) = P(A | B_i) P(B_i)$ .

**13 ★** Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ .

**14 ★** W urnie jest  $n$  kul, w tym 3 białe. Losujemy jednocześnie dwie kule. Prawdopodobieństwo, że obie będą białe, jest równe  $\frac{1}{15}$ . Oblicz  $n$ .

**15 ★** Na pewną chorobę choruje 1% osób. Test wykrywa ją u 99% chorych, ale u 2% zdrowych też daje wynik dodatni. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba z dodatnim wynikiem testu jest chora.

# Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Przy każdym zadaniu jest wynik, wskazówka i szkic rozumowania, bez pełnych rachunków.

## Ćwiczenia

**1** ODP.  $2 \cdot 7! = 10\,080$

WSK. Metoda bloków.

SZKIC Ola i Ela to jeden blok: z sześcioma pozostałymi osobami 7 obiektów, czyli  $7!$ ; w bloku  $2!$  ustawienia.

**2** ODP. 151 200

WSK. Litery M i T występują po dwa razy, A – trzy razy.

SZKIC  $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151\,200$ .

**3** ODP. a) 1320; b)  $n(n+1)$

WSK. Zostaje tyle czynników, ile wynosi różnica liczb.

SZKIC a)  $12 \cdot 11 \cdot 10$ ; b)  $(n+1) \cdot n$ .

**4** ODP. a)  $8^5 = 32\,768$ ; b) 6720

WSK. Kratki: każda osoba to jedna kratka.

SZKIC a) każda z pięciu osób ma 8 pięter; b)  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ .

**5** ODP. 12

WSK. Partii jest  $\binom{n}{2}$ .

SZKIC  $\frac{n(n-1)}{2} = 66$ , czyli  $n(n-1) = 132 = 12 \cdot 11$ .

**6** ODP. 3840

WSK. Metoda przypadków niedozwolonych.

SZKIC Zero na początku dozwolone:  $\binom{6}{2} \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 5760$ ; zero na początku:  $\binom{5}{1} \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 1920$ ;  $5760 - 1920 = 3840$ .

**7** ODP. 1440

WSK. Metoda luk.

SZKIC Chłopcy na  $4!$  sposobów tworzą 5 luk; trzy luki na  $\binom{5}{3} = 10$  sposobów, dziewczynki w nich na  $3!$ :  $24 \cdot 10 \cdot 6$ .

**8** ODP. 80

WSK. Składnik  $\binom{5}{3} x^2 (2y)^3$ .

SZKIC  $10 \cdot 2^3 = 80$ .

**9** ODP.  $\approx 0,737$

WSK. Co najmniej 4 trafienia to 4 albo 5.

SZKIC  $\binom{5}{4} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 + 0,8^5 = 0,4096 + 0,32768 = 0,73728$ .

**10** ODP.  $\frac{3}{5}$

WSK. Drzewko o dwóch gałęziach.

SZKIC  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ .

**11** ODP.  $\frac{1}{6}$

WSK.  $P(A | B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$ .

SZKIC  $|B| = 3 \cdot 6 = 18$ ;  $A \cap B$ :  $(2, 6)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(6, 2)$ ;  $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ .

**12** ODP.  $EX = -\frac{5}{6}$  zł; nie

WSK. Średnia ważona prawdopodobieństwami.

SZKIC  $20 \cdot \frac{1}{6} + (-5) \cdot \frac{5}{6} = -\frac{5}{6} \approx -0,83$  zł; gra byłaby uczciwa przy  $EX = 0$ .

## Dodatek

**13** zadanie na dowód

WSK. Wzór Newtona dla  $a = b = 1$ .

SZKIC  $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ . Inaczej: obie strony liczą wszystkie podzbiory

zbioru  $n$ -elementowego – każdy element jest w podzbiorze albo nie.

**14** ODP.  $n = 10$

WSK.  $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{15}$ .

SZKIC  $\frac{3 \cdot 2}{n(n-1)} = \frac{1}{15}$ , czyli  $n(n-1) = 90 = 10 \cdot 9$ .

**15** ODP.  $\frac{1}{3}$

WSK. Wzór Bayesa i prawdopodobieństwo całkowite.

SZKIC  $P(+)=0,01 \cdot 0,99+0,99 \cdot 0,02=0,0297$ ;

$P(\text{chory} \mid +)=\frac{0,0099}{0,0297}=\frac{1}{3}$ .