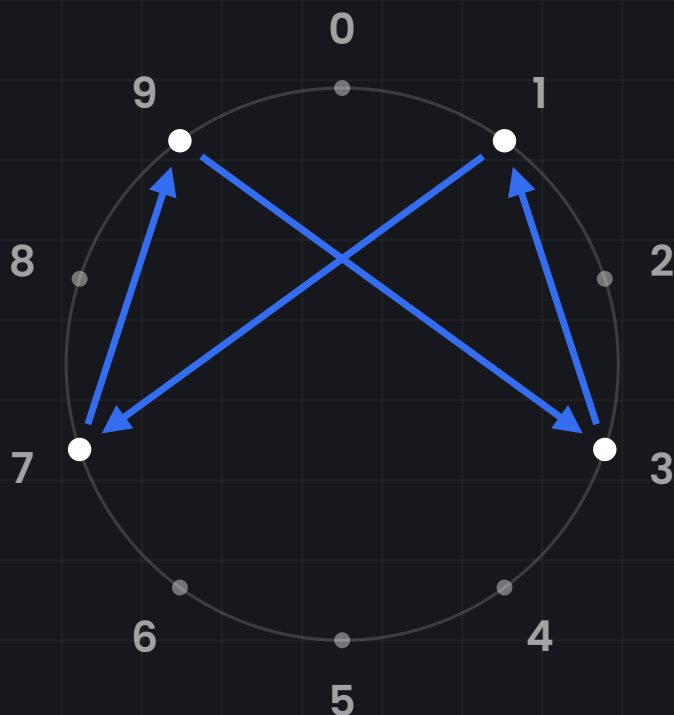




DOWODY

PODZIELNOŚCI

Dowody podzielności · matura rozszerzona

ZAKRES

MATURY 2011–2026

06



TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

 [Zobacz kurs](#) 

DODATKOWE MATERIAŁY

 [Wszystkie materiały](#) 

 [Autorskie arkusze próbne](#) 

 [Krótkie filmy](#) 

 [Dłuższe filmy](#) 

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

 [Dołącz](#)

Spis treści

1.	Niezbędnik dowodów podzielności	4
	Jak dowodzić podzielności	4
	Odejmujemy to, przez co dzielimy	5
	Reszty z dzielenia przez 2 i przez 3	6
	Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych	7
	Suma sześciątów – sztuczka ze wzorów Viète’a	7
	Dowód nie wprost	8
	Czego się spodziewać na maturze	9
2.	Kongruencje	10
	Przystawanie modulo	10
	Własności kongruencji	11
	Trzy przykłady z lekcji	11
3.	Liczby pierwsze	13
	Liczba pierwsza a podzielność przez 24	13
	Liczby Mersenne’a	14
	Liczby pierwsze bliźniacze	15
4.	Ćwiczenia	16
5.	Dodatek	17
	Dlaczego $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną	17
	Dlaczego kongruencje można dodawać i mnożyć stronami	17
	Wzory na różnicę i sumę potęg	17
	Odpowiedzi i krótkie rozwiązania	18

Niezbędnik dowodów podzielności

Ten rozdział idzie tą samą drogą co lekcja. Najpierw **plan dowodu podzielności**, potem trzy zadania z matur i dwa ze **zbioru zadań CKE**. Przy każdym widać ten sam schemat: wyrażenie zapisujemy w **postaci iloczynowej**, a potem badamy czynniki, w razie potrzeby rozpatrując **reszty z dzielenia**. Przy ostatnim zadaniu poznajemy **dowód nie wprost**. Każda ramka z zadaniem ma plakietkę z momentem w filmie.

Jak dowodzić podzielności

Dowody podzielności zdarzają się na maturze rzadko, ale gdy już się pojawiają, sprawiają zdającym dużo kłopotu. We wszystkich zadaniach z tego rozdziału powtarza się ten sam plan.

PLAN DOWODU PODZIELNOŚCI

1. Zapisz wyrażenie w **postaci iloczynowej** – zwykle pomagają wzory skróconego mnożenia i grupowanie wyrazów.
2. Jeśli dzielnik jest iloczynem liczb względnie pierwszych, wykaż **osobno podzielność przez każdą z nich**: przez 6 to przez 2 i przez 3, przez 36 to przez 4 i przez 9.
3. Gdy to nie wystarcza, rozpatrz **reszty z dzielenia**: liczba całkowita ma postać $2k$ albo $2k + 1$; $3k$, $3k + 1$ albo $3k + 2$ i tak dalej.
4. Dodanie lub odjęcie wielokrotności dzielnika **nie zmienia podzielności**: liczba dzieli się przez 16 wtedy i tylko wtedy, gdy przez 16 dzieli się liczba od niej o 16 mniejsza.

Odejmujemy to, przez co dzielimy

CZERWIEC 2019 · ZADANIE NR 9

W FILMIE 1:25

3 PKT

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie

$$n^5 - 3n^4 - n + 19$$

jest podzielne przez 16.

Na co zwrócić uwagę. Założenie, że n jest liczbą nieparzystą, decyduje o całym dowodzie – warto je od razu zaznaczyć w treści, żeby o nim nie zapomnieć.

Najwygodniej byłoby zapisać wyrażenie w postaci iloczynowej, ale zgadywanie pierwiastków nic tu nie da: kandydatami są tylko dzielniki wyrazu wolnego, ± 1 i ± 19 , a żaden z nich nie jest pierwiastkiem. Pomaga obserwacja, że liczba dzieli się przez 16 wtedy i tylko wtedy, gdy przez 16 dzieli się liczba o 16 mniejsza. Rozbijamy więc $19 = 3 + 16$:

$$n^5 - 3n^4 - n + 19 = (n^5 - 3n^4 - n + 3) + 16$$

i wystarczy wykazać, że przez 16 dzieli się nawias. Grupujemy pierwszy wyraz z drugim i trzeci z czwartym, a potem dwa razy korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned} n^5 - 3n^4 - n + 3 &= n^4(n - 3) - (n - 3) = (n - 3)(n^4 - 1) \\ &= (n - 3)(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1). \end{aligned}$$

Liczba n jest nieparzysta, więc liczby $n - 3$, $n - 1$ i $n + 1$ są parzyste, a n^2 jest nieparzyste, czyli $n^2 + 1$ też jest parzyste. Iloczyn czterech liczb parzystych dzieli się przez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, a dodanie 16 podzielności nie zmienia. Na maturze wystarczy zapisać ten wniosek właśnie tymi słowami.

Reszty z dzielenia przez 2 i przez 3

MAJ 2018 · ZADANIE NR 8

POZIOM WYKONANIA 4%

W FILMIE 6:24

3 PKT

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba

$$k^3m - km^3$$

jest podzielna przez 6.

Na co zwrócić uwagę. $6 = 2 \cdot 3$, a liczby 2 i 3 są względnie pierwsze – wystarczy wykazać podzielność osobno przez 2 i osobno przez 3.

Wyłączamy km przed nawias i korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k - m)(k + m).$$

Podzielność przez 2. Jeżeli któraś z liczb k , m jest parzysta, to parzysty jest cały iloczyn. Jeżeli obie są nieparzyste, to ich różnica $k - m$ jest parzysta. W każdym przypadku iloczyn dzieli się przez 2.

Podzielność przez 3. Jeżeli któraś z liczb k , m dzieli się przez 3, to przez 3 dzieli się cały iloczyn. W przeciwnym razie obie liczby dają z dzielenia przez 3 resztę 1 albo 2:

- jeśli reszty są **równe**, na przykład $k = 3k_1 + 1$ i $m = 3m_1 + 1$, to w różnicy reszty się kasują:
 $k - m = 3(k_1 - m_1)$;
- jeśli reszty są **różne**, na przykład $k = 3k_1 + 1$ i $m = 3m_1 + 2$, to przez 3 dzieli się suma:
 $k + m = 3(k_1 + m_1 + 1)$.

Iloczyn dzieli się przez 2 i przez 3, więc dzieli się przez 6. Takie rozumowanie można na maturze po prostu opisać zdaniami.

RESZTY SIĘ KASUJĄ

Jeżeli liczby całkowite a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez n , to ich różnica $a - b$ dzieli się przez n .

Zapisując liczbę k jako $2k_1 + 1$, bierzemy **nową literę**. Zapis $k = 2k + 1$ jest błędny – z takiej równości wynika $k = -1$.

Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych

MAJ 2011 • ZADANIE NR 1

W FILMIE 9:58

4 PKT

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

Znowu zaczynamy od postaci iloczynowej. Wyłączamy k^2 , a w nawiasie rozpoznajemy kwadrat różnicy $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ dla $a = k^2$ i $b = 1$:

$$\begin{aligned} k^6 - 2k^4 + k^2 &= k^2 (k^4 - 2k^2 + 1) = k^2 (k^2 - 1)^2 \\ &= k^2 (k - 1)^2 (k + 1)^2 = [(k - 1) k (k + 1)]^2. \end{aligned}$$

Jeżeli liczba w nawiasie kwadratowym dzieli się przez 6, to jej kwadrat dzieli się przez $6^2 = 36$. A w nawiasie stoi iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych.

ILOCZYN TRZECH KOLEJNYCH LICZB CAŁKOWITYCH

Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych dzieli się przez 6. Wśród tych liczb co najmniej jedna jest parzysta (liczby parzyste występują co dwie) i dokładnie jedna dzieli się przez 3 (takie liczby występują co trzy).

Na przykład dla $k = 5$ w nawiasie stoi $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 = 6 \cdot 20$.

Suma sześciątów – sztuczka ze wzorów Viète'a

ZBIÓR ZADAŃ CKE 2022 • ZADANIE NR 5

W FILMIE 13:35

4 PKT

Suma liczb całkowitych x i y jest podzielna przez 3.

Wykaż, że suma sześciątów liczb x i y jest podzielna przez 9.

Założenie zapisujemy jako $x + y = 3k$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Sumę sześciątów rozkładamy ze wzoru

$$x^3 + y^3 = (x + y) (x^2 - xy + y^2) = 3k (x^2 - xy + y^2).$$

Jedną trójkę już mamy, drugiej szukamy w nawiasie. Zapisujemy go za pomocą sumy $x + y$ i iloczynu xy – tak jak w zadaniach ze wzorami Viète'a:

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= (x^2 + 2xy + y^2) - 3xy = (x + y)^2 - 3xy \\ &= 9k^2 - 3xy = 3(3k^2 - xy). \end{aligned}$$

Liczba $3k^2 - xy$ jest całkowita, więc

$$x^3 + y^3 = 3k \cdot 3(3k^2 - xy) = 9k(3k^2 - xy)$$

dzieli się przez 9.

Dowód nie wprost

ZBIÓR ZADAŃ CKE 2022 · ZADANIE NR 4

W FILMIE 17:53

2 PKT

Rozpatrzmy liczby naturalne większe od 1000, w których zapisie występuje tylko cyfra 1:

$$a = \underbrace{11 \dots 111}_n$$

Wykaż, że jeśli liczba a zapisana za pomocą n jedynek jest liczbą pierwszą, to liczba n również jest liczbą pierwszą.

O liczbach pierwszych trudno cokolwiek wykazać wprost, więc dowodzimy **nie wprost**. Tę metodę znamy od przedszkola: dwóch chłopców licytuje się, kto ma więcej, i gdy jeden mówi „a ja mam milion”, drugi odpowiada „a ja mam tyle co ty plus jeden”. To dowód nie wprost, że nie ma największej liczby naturalnej: gdyby jakaś liczba N była największa, to $N + 1$ byłaby od niej większa – sprzeczność.

DOWÓD NIE WPROST

Zamiast wykazywać, że z P wynika Q , można wykazać, że z zaprzeczenia Q wynika zaprzeczenie P :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Nie wprost dowodzi się też, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną: zakładamy, że jest wymierna, i dochodzimy do sprzeczności (pełny dowód jest w dodatku).

W zadaniu wykazujemy więc, że jeżeli n jest liczbą złożoną, to a też jest liczbą złożoną. Niech $n = k \cdot m$, gdzie k i m są liczbami naturalnymi większymi od 1. Zapis liczby a dzielimy na m grup po k jedynek. Każda grupa to liczba $b = \underbrace{11 \dots 1}_k$ pomnożona przez odpowiednią potęgę dziesiątki, więc

$$\begin{aligned} a &= b \cdot 10^{k(m-1)} + \dots + b \cdot 10^{2k} + b \cdot 10^k + b \\ &= b(10^{k(m-1)} + \dots + 10^{2k} + 10^k + 1). \end{aligned}$$

Oba czynniki są większe od 1, bo $k > 1$ i $m > 1$, więc a jest liczbą złożoną. Jeśli zatem a jest

liczbą pierwszą, to n też musi być liczbą pierwszą.

SZEŚĆ JEDYNEK

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 24:25

Liczba $6 = 2 \cdot 3$ jest złożona, więc liczba 111 111 też powinna być złożona.

-
- I Dzielimy zapis na trzy grupy po dwie jedynek: $111\,111 = 110\,000 + 1\,100 + 11$.
 - II Każdy składnik to 11 razy potęga dziesiątki: $111\,111 = 11 \cdot 10^4 + 11 \cdot 10^2 + 11 = 11 \cdot 10\,101$.

Czego się spodziewać na maturze

Zadanie w rodzaju tego z liczbą złożoną z samych jedynek raczej się na maturze nie pojawi. Typowe zadanie maturalne wygląda jak trzy pierwsze z tego rozdziału: wyrażenie trzeba rozłożyć na czynniki, korzystając z umiejętności algebraicznych, a potem ewentualnie rozpatrzeć reszty z dzielenia czynników przez 2, przez 3 albo przez inną liczbę.

2

Kongruencje

Kongruencji nie ma w podstawie programowej – to rozdział dla ciekawych. Kongruencja to krótki zapis rachunków na resztach z dzielenia. Dzięki niej w kilku liniijkach dowodzi się rzeczy, których na pierwszy rzut oka nie wiadomo jak ruszyć. Każdy taki rachunek da się też zapisać językiem reszt.

Przystawanie modulo

KONGRUENCJA

Liczba całkowita m **przystaje do** liczby całkowitej k **modulo** n , gdy n dzieli różnicę $m - k$. Zapisujemy to tak:

$$m \equiv k \pmod{n}.$$

Inaczej: liczby m i k dają tę samą resztę z dzielenia przez n .

Na przykład $7 \equiv 2 \pmod{5}$, bo różnica $7 - 2 = 5$ dzieli się przez 5, a obie liczby dają z dzielenia przez 5 resztę 2. Kongruencję można przekształcać podobnie jak równanie. Z $12 \equiv 0 \pmod{3}$ po odjęciu 2 od obu stron dostajemy $10 \equiv -2 \pmod{3}$ – i to nadal jest prawda, bo $10 - (-2) = 12$ dzieli się przez 3. Kongruencje można też łączyć w łańcuchy:

$$10 \equiv -2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Dodanie lub odjęcie n nie zmienia reszty z dzielenia przez n , więc na przykład $5 \equiv 1 \equiv -1 \pmod{2}$.

Zamiast reszty $n - 1$ wygodnie pisać -1 : $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $2 \equiv -1 \pmod{3}$, $49 \equiv -1 \pmod{10}$. Potęgi liczby -1 liczy się w pamięci – korzystają z tego wszystkie przykłady w tym rozdziale.

Własności kongruencji

DZIAŁANIA NA KONGRUENCJACH

Jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n}$ – z tym samym modułem n – to

$$\begin{aligned} a + c &\equiv b + d \pmod{n}, & a - c &\equiv b - d \pmod{n}, \\ ac &\equiv bd \pmod{n}, & a^k &\equiv b^k \pmod{n} \text{ dla każdej liczby naturalnej } k. \end{aligned}$$

Kongruencje o tym samym module można więc dodawać, odejmować i mnożyć stronami, a także podnosić do potęgi. Wykładnik k nie ma nic wspólnego z modułem n . Dowody tych własności są krótkie – stoją w dodatku.

Dzielić kongruencje stronami w ogólności **nie wolno**: $2 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 1 \pmod{6}$, bo $8 - 2 = 6$, ale $4 \not\equiv 1 \pmod{6}$.

Trzy przykłady z lekcji

PODZIELNOŚĆ

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 31:52

Wykażmy, że 11 dzieli liczbę $10^{2026} - 1$.

- I $11 \equiv 0 \pmod{11}$, więc po odjęciu 1 od obu stron $10 \equiv -1 \pmod{11}$.
- II Podnosimy obie strony do potęgi 2026: $10^{2026} \equiv (-1)^{2026} = 1 \pmod{11}$.
- III Z definicji kongruencji 11 dzieli $10^{2026} - 1$. Inaczej mówiąc, liczba zapisana za pomocą 2026 dziewiątek dzieli się przez 11.

PODZIELNOŚĆ

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 33:35

Wykażmy, że 3 dzieli $2^n + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

- I $3 \equiv 0 \pmod{3}$, więc $2 \equiv -1 \pmod{3}$.
- II Podnosimy do potęgi n : $2^n \equiv (-1)^n \pmod{3}$, czyli 3 dzieli $2^n - (-1)^n$.
- III Dla nieparzystego n mamy $(-1)^n = -1$, więc 3 dzieli $2^n + 1$. Dla parzystego n jest $2^n \equiv 1 \pmod{3}$, więc $2^n + 1$ daje resztę 2 i przez 3 się nie dzieli.

Ten sam fakt da się wykazać po szkolnemu. Oprócz wzoru na sumę sześcianów są wzory na sumę dowolnych **nieparzystych** potęg – w drugim nawiasie znaki się przeplatają:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

i tak dalej. Dla nieparzystego n mamy więc $2^n + 1 = 2^n + 1^n = (2 + 1) \cdot c = 3c$, gdzie c jest liczbą całkowitą. Na maturze częściej przyda się sam wzór na $a^3 + b^3$.

OSTATNIA CYFRA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 36:51

Jaka jest ostatnia cyfra liczby 7^{2026} ?

- I Ostatnia cyfra liczby naturalnej to jej reszta z dzielenia przez 10, na przykład $257 = 25 \cdot 10 + 7$.
- II $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$, bo $49 - (-1) = 50$.
- III Podnosimy do potęgi 1013: $7^{2026} = (7^2)^{1013} \equiv (-1)^{1013} = -1 \equiv 9 \pmod{10}$. Ostatnia cyfra to 9.

3

Liczby pierwsze

Liczby pierwsze to wyższa szkoła jazdy: dużo o nich wiemy, a wiele pytań wciąż czeka na odpowiedź. W tym rozdziale dwa przykłady z lekcji i dwie ciekawostki.

Liczba pierwsza a podzielność przez 24

LICZBY PIERWSZE

PRZYKŁAD Z LEKCJI - 40:40

Wykażmy, że dla każdej liczby pierwszej $p \geq 5$ liczba $p^2 - 1$ dzieli się przez 24.

- I Postać iloczynowa: $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, a $24 = 8 \cdot 3$.
- II Liczba p jest nieparzysta, więc $p = 4k + 1$ albo $p = 4k + 3$. W pierwszym przypadku $(p - 1)(p + 1) = 4k(4k + 2) = 8k(2k + 1)$, w drugim $(4k + 2)(4k + 4) = 8(2k + 1)(k + 1)$ – w obu iloczyn dzieli się przez 8.
- III Liczba p nie dzieli się przez 3, więc $p = 3k + 1$ (wtedy 3 dzieli $p - 1$) albo $p = 3k + 2$ (wtedy 3 dzieli $p + 1$).
- IV Liczby 8 i 3 są względnie pierwsze, więc 24 dzieli $p^2 - 1$.

Z tego, że p jest liczbą pierwszą, skorzystaliśmy tylko po to, żeby wiedzieć, że p jest nieparzysta i niepodzielna przez 3. Teza zachodzi więc dla każdej takiej liczby, na przykład $25^2 - 1 = 624 = 24 \cdot 26$.

Liczby Mersenne’a

LICZBY ZŁOŻONE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 43:40

Wykażmy, że jeżeli n jest liczbą złożoną, to $2^n - 1$ też jest liczbą złożoną.

- I $n = mk$, gdzie m i k są liczbami naturalnymi większymi od 1. Wtedy $2^n - 1 = (2^m)^k - 1^k$.
- II Ze wzoru na różnicę potęg (niżej) liczba $(2^m)^k - 1^k$ dzieli się przez $2^m - 1$.
- III $2^m - 1 > 1$, bo $m > 1$, a $2^m - 1 < 2^n - 1$. Liczba $2^n - 1$ ma więc dzielnik różny od 1 i od siebie samej – jest złożona.

RÓŻNICA POTĘG

Dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Najprostsze przypadki to $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ i $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Liczba $2^n - 1$ może więc być pierwsza tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą. Liczby postaci $2^n - 1$ nazywamy **liczbami Mersenne’a**, a te z nich, które są pierwsze – **liczbami pierwszymi Mersenne’a**. Na przykład $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$ i $2^7 - 1 = 127$ są pierwsze. Wykładnik będący liczbą pierwszą to jednak za mało: $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

Marin Mersenne (1588–1648) był francuskim zakonnikiem z zakonu minimów, matematykiem i teologiem. Prowadził rozległą korespondencję z uczonymi swoich czasów, między innymi z Kartezjuszem i Fermatem. Znamy dziś 52 liczby pierwsze Mersenne’a (stan na październik 2026). Największa z nich, $2^{136\,279\,841} - 1$, jest zarazem największą znaną liczbą pierwszą. Nie wiadomo, czy liczb pierwszych Mersenne’a jest nieskończenie wiele.

Liczby pierwsze bliźniacze

Matura 2027 wypada w roku, który jest liczbą pierwszą. Liczbą pierwszą jest też 2029. Dwie liczby pierwsze różniące się o 2 nazywamy **liczbami pierwszymi bliźniaczymi**: na przykład 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, a także 2027 i 2029. Bliżej siebie dwie liczby pierwsze leżeć nie mogą – poza parą 2 i 3 – bo wszystkie liczby pierwsze oprócz 2 są nieparzyste.

Nie wiadomo, czy par liczb pierwszych bliźniaczych jest nieskończenie wiele. To jeden z najśłynniejszych otwartych problemów matematyki – hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych.

4

Ćwiczenia

- 1 Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n liczba $n^5 - 3n^4 - n + 35$ jest podzielna przez 16.
- 2 Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 16.
- 3 Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.
- 4 Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k$ jest podzielna przez 24.
- 5 Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy równej 5, a jedna z nich jest wielokrotnością liczby 5. Wykaż, że iloczyn abc jest podzielny przez 750.
- 6 Różnica liczb całkowitych x i y jest podzielna przez 3. Wykaż, że liczba $x^3 - y^3$ jest podzielna przez 9.
- 7 Wykaż, że liczba zapisana za pomocą 35 jedynek jest liczbą złożoną.
- 8 Wykaż, że liczba $10^{2027} + 1$ jest podzielna przez 11.
- 9 Wyznacz ostatnią cyfrę liczby 3^{2026} .
- 10 Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{3n} - 1$ jest podzielna przez 7.
- 11 Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to $p^2 + 2$ jest liczbą złożoną.
- 12 Wykaż, że liczba $2^{15} - 1$ jest liczbą złożoną.

Dodatek

Dlaczego $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną

Przypuśćmy, że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami naturalnymi, a ułamek jest nieskracalny. Wtedy $p^2 = 2q^2$, więc p^2 jest liczbą parzystą, a zatem p jest parzyste – kwadrat liczby nieparzystej jest nieparzysty. Niech $p = 2r$. Wtedy $4r^2 = 2q^2$, czyli $q^2 = 2r^2$, więc również q jest parzyste. Licznik i mianownik dzielą się przez 2, co przeczy temu, że ułamek jest nieskracalny. Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dlaczego kongruencje można dodawać i mnożyć stronami

Niech n dzieli $a - b$ i $c - d$. Wtedy

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d), \quad ac - bd = a(c - d) + d(a - b).$$

Po prawej stronie stoją suma i wielokrotności liczb podzielnych przez n , więc obie różnice dzielą się przez n . Potęgowanie to mnożenie kongruencji $a \equiv b$ przez siebie k razy.

Wzory na różnicę i sumę potęg

Po wymnożeniu w iloczynie

$$(a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

wyrazy znoszą się parami i zostaje tylko $a^k - b^k$. Gdy k jest nieparzyste, wstawiamy $-b$ w miejsce b i dostajemy wzór na sumę potęg:

$$a^k + b^k = (a + b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + \dots - ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

13 ★ Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b liczba $a^5b - ab^5$ jest podzielna przez 30.

14 ★ Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nie jest podzielna przez 3.

15 ★ Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ jest podzielna przez 7.

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Prawie wszystkie zadania są na dowód – przy każdym jest wskazówka albo szkic rozumowania, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 zadanie na dowód

WSK. Rozbij $35 = 3 + 32$.

SZKIC $n^5 - 3n^4 - n + 35 = (n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1) + 32$; cztery czynniki są parzyste, a 32 dzieli się przez 16.

2 zadanie na dowód

WSK. Rozłóż na czynniki.

SZKIC $n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$. Liczby $n-1$ i $n+1$ to kolejne liczby parzyste, więc jedna z nich dzieli się przez 4 i ich iloczyn dzieli się przez 8; n^2+1 jest parzyste.

3 zadanie na dowód

WSK. $5n = 6n - n$.

SZKIC $n^3 + 5n = (n-1)n(n+1) + 6n$; iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych dzieli się przez 6.

4 zadanie na dowód

WSK. Wyłącz k i pogrupuj wyrazy w nawiasie.

SZKIC $k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k = (k-2)(k-1)k(k+1) - \text{iloczyn czterech kolejnych liczb}$. Jedna z nich dzieli się przez 3, dwie są parzyste, w tym jedna podzielna przez 4; razem $3 \cdot 8 = 24$.

5 zadanie na dowód

WSK. Wszystkie trzy liczby są wielokrotnościami 5.

SZKIC $b = 5t$, $a = 5(t-1)$, $c = 5(t+1)$, więc $abc = 125(t-1)t(t+1)$ dzieli się przez

$$125 \cdot 6 = 750.$$

6 zadanie na dowód

WSK. Jak w zadaniu ze zbioru CKE, ale ze wzoru na różnicę sześcianów.

SZKIC $x - y = 3k$; $x^3 - y^3 = (x-y)[(x-y)^2 + 3xy] = 3k(9k^2 + 3xy) = 9k(3k^2 + xy)$.

7 zadanie na dowód

WSK. $35 = 5 \cdot 7$.

SZKIC Pięć grup po siedem jedynek: liczba dzieli się przez 1 111 111, a iloraz jest większy od 1 (albo siedem grup po pięć jedynek – dzielnik 11 111).

8 zadanie na dowód

WSK. $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

SZKIC $10^{2027} \equiv (-1)^{2027} = -1 \pmod{11}$, więc $10^{2027} + 1 \equiv 0 \pmod{11}$.

9 ODP. 9

WSK. $3^2 = 9 \equiv -1 \pmod{10}$.

SZKIC $3^{2026} = (3^2)^{1013} \equiv (-1)^{1013} = -1 \equiv 9 \pmod{10}$.

10 zadanie na dowód

WSK. $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$.

SZKIC $2^{3n} = 8^n \equiv 1^n = 1 \pmod{7}$, więc 7 dzieli $2^{3n} - 1$.

11 zadanie na dowód

WSK. Kwadrat liczby niepodzielnej przez 3

daje z dzielenia przez 3 resztę 1.

szkic $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$, więc $p^2 \equiv 1$ i $p^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$; a $p^2 + 2 > 3$, więc to liczba złożona.

12 zadanie na dowód

WSK. $15 = 3 \cdot 5$.

szkic $2^{15} - 1 = (2^3)^5 - 1^5$ dzieli się przez $2^3 - 1 = 7$; rzeczywiście $32\,767 = 7 \cdot 31 \cdot 151$.

Dodatek

13 zadanie na dowód

WSK. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ oraz $a^5b - ab^5 = ab(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

szkic Przez 2 i przez 3 – jak w zadaniu

z maja 2018. Przez 5: jeśli 5 nie dzieli a ani b , to ich reszty to ± 1 albo ± 2 . Przy $a \equiv b$ dzieli się $a - b$, przy $a \equiv -b$ dzieli się $a + b$, a gdy jedna reszta to ± 1 , a druga ± 2 , to $a^2 + b^2 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$.

14 zadanie na dowód

szkic $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 3n^2 + 2$ daje z dzielenia przez 3 resztę 2.

15 zadanie na dowód

WSK. $9 \equiv 2 \pmod{7}$.

szkic $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n \equiv 3 \cdot 2^n$ i $2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$, więc suma przystaje do $7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{7}$.