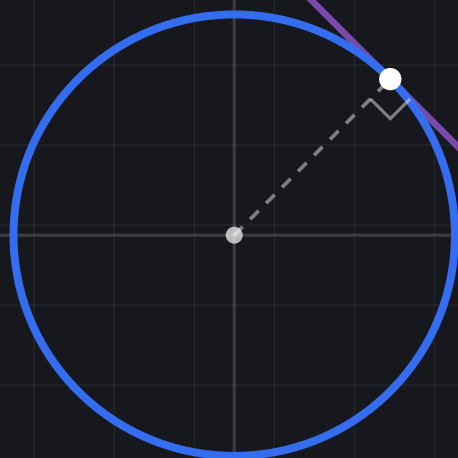




DOWODY ALGEBRAICZNE

Dowody algebraiczne · matura rozszerzona

ZAKRES

MATURY 2015–2026

05



TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

 [Zobacz kurs](#) 

DODATKOWE MATERIAŁY

 [Wszystkie materiały](#) 

 [Autorskie arkusze próbne](#) 

 [Krótkie filmy](#) 

 [Dłuższe filmy](#) 

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

 [Dołącz](#)

Spis treści

1.	Niezbędnik dowodów algebraicznych	4
	Pięć sposobów na dowód	4
	Podpowiedź ukryta w tezie	5
	Podpowiedź ukryta w założeniu	6
	Suma kwadratów	7
	Nierówność jako zadanie z parametrem	7
	Nierówność wielomianowa: rozkład na czynniki	8
	Pochodna jako koło ratunkowe	9
	Nierówność między średnimi	10
	Założenie, które trzeba wyprowadzić samemu	12
	Metoda geometryczna	13
	Wielomian czwartego stopnia: kwadraty albo pochodna	14
	Warunek z sumą: jedna niewiadoma zamiast dwóch	15
	Nierówność z pierwiastkami	16
	Co zapamiętać	17
2.	Ćwiczenia	18
3.	Dodatek	20
	Dlaczego trójmian o wyróżniku zero jest kwadratem	20
	Nierówność między średnimi dla dwóch liczb	20
	Odpowiedzi i krótkie rozwiązania	21

Niezbędnik dowodów algebraicznych

Ten rozdział idzie tą samą drogą co lekcja. Zaczynamy od **sposobów dowodzenia** i **wzórów skróconego mnożenia**. Potem dwa zadania, w których odpowiedź kryje się w treści: raz w **tezie**, raz w **założeniu**. Jedną nierówność dowodzimy **sumą kwadratów** i jako **zadanie z parametrem**, drugą – **rozkładem wielomianu**, **po pochodną** i **nierównością między średnimi**. W drugiej części: **założenia wyprowadzane samemu**, **metoda geometryczna**, wielomian czwartego stopnia, warunek z sumą i nierówność z pierwiastkami. Na koniec krótkie podsumowanie. Każda z ośmiu ramek z zadaniami CKE ma plakietkę z momentem w filmie.

Pięć sposobów na dowód

Zadanie z dowodem algebraicznym jest prawie w każdym arkuszu maturalnym. Najczęściej trzeba wykazać nierówność, rzadziej równość. W lekcji jest pięć sposobów:

1. **bezpośrednio**, przekształceniami algebraicznymi – zwykle ze wzorami skróconego mnożenia;
2. **geometrycznie**, narzędziami geometrii analitycznej;
3. **po pochodną** – badając, gdzie funkcja rośnie, a gdzie maleje;
4. **jak zadanie z parametrem**, gdy nierówność jest kwadratowa względem jednej z niewiadomych;
5. **nierównością między średnimi**.

Przed lekcją warto powtórzyć wzory skróconego mnożenia – wracają w każdym zadaniu.

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, & a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, & a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2), \\& & a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2).\end{aligned}$$

Najczęściej przydaje się kwadrat sumy albo różnicy: prawie każdy dowód z tej lekcji kończy się wyrażeniem, które okazuje się kwadratem, a kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Podpowiedź ukryta w tezie

Zanim zaczniemy przekształcać, warto przeczytać, co mamy wykazać. Teza często podpowiada, do jakiej postaci trzeba dojść.

CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 8

POZIOM WYKONANIA 25%

W FILMIE 2:40

3 PKT

Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$.

Wykaż, że $a = 2b$.

Na co zwrócić uwagę. Teza $a = 2b$ to inaczej $a - 2b = 0$. Taką równość dostaniemy, jeśli założenie uda się zapisać jako iloczyn $(a - 2b) \cdot W = 0$, w którym drugi czynnik W nie jest zerem. Założenie mówi też – słowami, a nie nierównością – że liczby a i b są dodatnie.

Przenosimy wszystko na jedną stronę i grupujemy kwadraty oraz wyrazy bez kwadratów:

$$a^2 + 2a - 4b^2 - 4b = 0 \iff (a^2 - 4b^2) + (2a - 4b) = 0.$$

Pierwszy nawias to różnica kwadratów, z drugiego wyłączamy dwójkę:

$$(a - 2b)(a + 2b) + 2(a - 2b) = 0,$$

$$(a - 2b)(a + 2b + 2) = 0.$$

Liczby a i b są dodatnie, więc $a + 2b + 2 > 0$ – na maturze wystarczy to jedno zdanie komentarza. Iloczyn jest zerem, a drugi czynnik nie, więc $a - 2b = 0$, czyli $a = 2b$.

Bez założenia o znakach dowód by się nie udał: drugi nawias mógłby być zerem. Na przykład liczby $a = -2$ i $b = 0$ spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$ (obie strony są równe 0), a mimo to $a \neq 2b$.

Podpowiedź ukryta w założeniu

Podpowiedź może też tkwić w założeniu.

MAJ 2022 · ZADANIE NR 6

POZIOM WYKONANIA 25%

W FILMIE 8:10

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $2x > y$, spełniona jest nierówność

$$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3.$$

Na co zwrócić uwagę. Założenie $2x > y$ to inaczej $2x - y > 0$. Jeśli po przeniesieniu wszystkiego na jedną stronę uda się wyłączyć czynnik $2x - y$, wystarczy pokazać, że drugi czynnik jest nieujemny.

Przenosimy wszystko na lewą stronę; $7x^3$ i x^3 dają razem $8x^3$:

$$8x^3 + 4x^2y - y^3 - 2xy^2 \geq 0.$$

Skoro ma się pojawić czynnik $2x - y$, łączymy $8x^3$ z $-y^3$ – to różnica sześcianów, bo $8x^3 = (2x)^3$ – a z dwóch pozostałych wyrazów wyłączamy $2xy$:

$$\begin{aligned} 8x^3 - y^3 &= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2), \\ 4x^2y - 2xy^2 &= 2xy(2x - y). \end{aligned}$$

Obie części zawierają czynnik $2x - y$ – to potwierdza, że droga jest dobra. Wyłączamy go przed nawias:

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2 + 2xy) = (2x - y)(4x^2 + 4xy + y^2) = (2x - y)(2x + y)^2.$$

Pierwszy czynnik jest dodatni z założenia, drugi – nieujemny jako kwadrat liczby rzeczywistej. Iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej jest nieujemny, co kończy dowód.

Kto nie pamięta wzoru na różnicę sześcianów, niech zapamięta przynajmniej pierwszy nawias: $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (\dots)$ – stoi w nim różnica tych samych liczb. Przy sumie sześcianów w pierwszym nawiasie jest suma, a minus pojawia się w drugim, przy ab .

Suma kwadratów

CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 7

W FILMIE 17:26

3 PKT

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0.$$

Na co zwrócić uwagę. Wyraz $-4xy$ pasuje do kwadratu różnicy $(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$. Z $5x^2$ bierzemy do tego kwadratu $4x^2$, a zostaje x^2 .

Lewą stronę zapisujemy więc tak:

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 = (4x^2 - 4xy + y^2) + (x^2 + 6x + 9) = (2x - y)^2 + (x + 3)^2.$$

Suma kwadratów liczb rzeczywistych jest nieujemna, co kończy dowód. Postępujemy tu tak samo jak przy sprowadzaniu równania okręgu do postaci kanonicznej: uzupełniamy wyrażenie do pełnych kwadratów.

Skąd wiadomo, że $x^2 + 6x + 9$ to kwadrat? Wyróżnik tego trójmianu jest równy $36 - 4 \cdot 9 = 0$. Trójmian kwadratowy o wyróżniku zero zawsze jest kwadratem dwumianu pomnożonym przez współczynnik przy x^2 – tu $(x + 3)^2$. W prostym przykładzie widać to od razu, w trudniejszym ten rachunek oszczędza zgadywania. Uzasadnienie jest w dodatku.

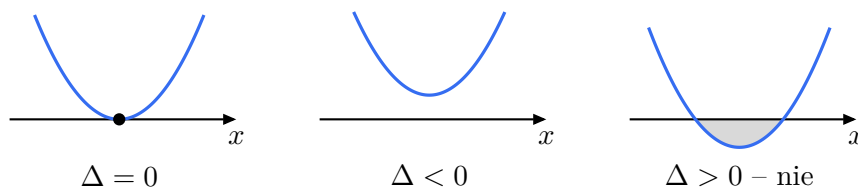
Nierówność jako zadanie z parametrem

Tę samą nierówność da się wykazać bez pomysłu na kwadraty. Traktujemy x jako zmienną, a y jako parametr, i porządkujemy lewą stronę według potęg x :

$$5x^2 + (6 - 4y)x + y^2 + 9 \geq 0.$$

Gdyby zamiast y stało tu m , polecenie brzmiałoby znajomo: wykaż, że dla każdej wartości parametru m ta nierówność kwadratowa jest prawdziwa dla wszystkich x .

Współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc parabola ma ramiona skierowane do góry. Nierówność zachodzi dla każdego x wtedy i tylko wtedy, gdy parabola ma co najwyżej jedno miejsce zerowe – dotyka osi albo leży nad nią. Przy dwóch miejscach zerowych kawałek paraboli zszedłby pod oś.



Trzeba więc wykazać, że wyróżnik, który zależy od y , jest niedodatni: $\Delta(y) \leq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta(y) &= (6 - 4y)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (y^2 + 9) \\ &= 36 - 48y + 16y^2 - 20y^2 - 180 \\ &= -4y^2 - 48y - 144 \\ &= -4(y^2 + 12y + 36) = -4(y + 6)^2.\end{aligned}$$

Kwadrat jest nieujemny, więc $-4(y + 6)^2 \leq 0$ dla każdego y , co kończy dowód. Trójmian w nawiasie znów rozpoznajemy po wyróżniku: $12^2 - 4 \cdot 36 = 0$.

Ten sposób jest dłuższy niż suma kwadratów i łatwiej w nim o błąd rachunkowy. Za to da się go zastosować zawsze, gdy nierówność jest kwadratowa względem jednej z niewiadomych – to dobre koło ratunkowe, gdy na maturze nie ma pomysłu na kwadraty, i dobry trening zadań z parametrem.

Nierówność wielomianowa: rozkład na czynniki

CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 5

W FILMIE 29:55

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12.$$

Na co zwrócić uwagę. Liczba a stoi w mianowniku, a z założenia jest dodatnia. Dlatego wolno pomnożyć obie strony nierówności przez a i zwrot nierówności się nie zmieni. Tę informację trzeba zapisać w rozwiązaniu: mnożymy przez wyrażenie, które w ogólności mogłoby mieć różne znaki.

Po pomnożeniu przez $a > 0$ i przeniesieniu wszystkiego na jedną stronę dostajemy nierówność wielomianową:

$$a^3 + 16 \geq 12a \iff a^3 - 12a + 16 \geq 0.$$

Najprostsza droga to rozkład wielomianu $W(a) = a^3 - 12a + 16$ na czynniki. Pierwiastka szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego, zaczynając od najmniejszych. Liczby ± 1 nie są pierwiastkami, ale

$$W(2) = 8 - 24 + 16 = 0,$$

więc z twierdzenia Bézouta wielomian dzieli się przez $a - 2$. Zamiast dzielić pisemnie albo schematem Hornera, rozbijamy $-12a$ na $-4a - 8a$ – tak, żeby każda z dwóch części zerowała się dla $a = 2$:

$$\begin{aligned} a^3 - 12a + 16 &= (a^3 - 4a) - (8a - 16) \\ &= a(a^2 - 4) - 8(a - 2) \\ &= a(a - 2)(a + 2) - 8(a - 2) \\ &= (a - 2)(a^2 + 2a - 8). \end{aligned}$$

Trójmian $a^2 + 2a - 8$ też zeruje się dla $a = 2$, bo $4 + 4 - 8 = 0$. Ze wzorów Viète’a iloczyn jego pierwiastków jest równy ilorazowi wyrazu wolnego przez współczynnik przy kwadracie, czyli $\frac{-8}{1} = -8$. Drugi pierwiastek to więc -4 , a $a^2 + 2a - 8 = (a - 2)(a + 4)$. Stąd

$$a^3 - 12a + 16 = (a - 2)^2(a + 4) \geq 0,$$

bo kwadrat jest nieujemny, a $a + 4 > 0$ dla $a > 0$. Iloczyn liczby nieujemnej i dodatniej jest nieujemny, co kończy dowód.

Nierówności nie wolno mnożyć przez wyrażenie, którego znaku nie znamy. Bez założenia $a > 0$ trzeba by rozpatrzyć przypadki – a dla niektórych $a < 0$ nierówność z zadania jest fałszywa, na przykład dla $a = -1$ lewa strona jest równa $1 - 16 = -15$.

Pochodna jako koło ratunkowe

Ten sam dowód da się przeprowadzić bez rozkładu na czynniki. Zamieniamy a na x , żeby wyglądało znajomo, i badamy funkcję

$$f(x) = x^3 - 12x + 16 \quad \text{dla } x > 0.$$

Kto jeszcze nie miał pochodnych, potrzebuje tu tylko kilku faktów.

POCHODNA W SKRÓCIE

Pochodna potęgi: $(x^n)' = nx^{n-1}$ – wykładnik staje przed x jako współczynnik, a sam zmniejsza się o 1. Na przykład $(x^3)' = 3x^2$, a $(12x)' = 12$. Pochodna stałej jest równa 0, a pochodna sumy to suma pochodnych.

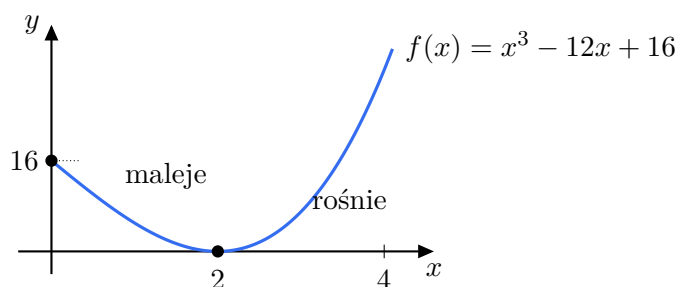
Jeżeli w pewnym przedziale $f'(x) > 0$, to funkcja f jest w nim rosnąca; jeżeli $f'(x) < 0$ – malejąca.

Pochodna mówi, jak zmienia się funkcja, a stała się nie zmienia – stąd zero. Liczymy:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2).$$

Pochodna to funkcja kwadratowa z ramionami do góry i miejscami zerowymi -2 oraz 2 . Interesują nas tylko $x > 0$: w przedziale $(0, 2)$ pochodna jest ujemna, więc f maleje, a w przedziale $(2, \infty)$ jest dodatnia, więc f rośnie. Najmniejszą wartość funkcja przyjmuje zatem dla $x = 2$:

$$f(2) = 8 - 24 + 16 = 0.$$



Każda wartość $f(x)$ dla $x > 0$ jest więc większa lub równa $f(2) = 0$, czyli $x^3 - 12x + 16 \geq 0$ – a to jest nierówność, którą mieliśmy wykazać. Wartość $f(2)$ policzyliśmy zresztą już wcześniej, przy zgadywaniu pierwiastka.

Nierówność między średnimi

Trzeci sposób na ten sam przykład jest najkrótszy, ale wymaga pomysłu. Wykorzystujemy w nim nierówność, którą można znaleźć w tablicach maturalnych.

NIERÓWNOŚĆ MIĘDZY ŚREDNIĄ ARYTMETYCZNĄ A GEOMETRYCZNĄ

Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \dots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie te liczby są równe.

Bierzemy trzy liczby: a^2 , $\frac{8}{a}$ i $\frac{8}{a}$ – ich suma to lewa strona nierówności z zadania. Wszystkie są dodatnie, bo $a > 0$, więc z nierówności między średnimi

$$\frac{a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Po pomnożeniu przez 3 dostajemy $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$, co kończy dowód.

Skąd ten pomysł? Po prawej stronie nierówności z zadania stoi liczba, więc iloczyn wybranych liczb nie może zależeć od a . Dlatego $\frac{16}{a}$ rozbijamy na dwie części: dwa mianowniki a skracają się z a^2 . Części mają być równe, bo równość w nierówności między średnimi zachodzi tylko dla równych liczb – tu $a^2 = \frac{8}{a}$, czyli $a = 2$.

Na maturze ten sposób jest najszybszy, ale dobór liczb wymaga wprawy. Zadanie za 3 punkty wygląda na proste, a każdy z trzech sposobów wymaga pomysłu albo pracy. Nierówność między średnimi przyda się też w części zadań optymalizacyjnych – tam pozwala czasem obejść się bez pochodnej.

Założenie, które trzeba wyprowadzić samemu

MAJ 2016 · ZADANIE NR 8

POZIOM WYKONANIA 20%

W FILMIE 49:20

3 PKT

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że

$$x^2 + y^2 = 2,$$

prawdziwa jest nierówność

$$x + y \leq 2.$$

Na co zwrócić uwagę. Z równości $x^2 + y^2 = 2$ wyznaczamy y – i w tym momencie trzeba samemu wyprowadzić warunek na x , którego nie ma w treści. Bez niego nie wolno potem podnieść nierówności do kwadratu. Takie niuanse po drodze mogą tłumaczyć, dlaczego to zadanie wypadło na maturze tak słabo.

Z założenia $y^2 = 2 - x^2$. Po spierwiastkowaniu dostalibyśmy w ogólności $|y| = \sqrt{2 - x^2}$, ale $y > 0$, więc $|y| = y$ i

$$y = \sqrt{2 - x^2}.$$

Skoro $y > 0$, to $2 - x^2 = y^2 > 0$, a razem z $x > 0$ daje to $x \in (0, \sqrt{2})$. Przedział jest otwarty: dla $x = \sqrt{2}$ wyszłoby $y = 0$, a y jest dodatnie.

Wstawiamy y do tezy i zostawiamy pierwiastek sam po jednej stronie:

$$x + \sqrt{2 - x^2} \leq 2 \iff \sqrt{2 - x^2} \leq 2 - x.$$

Teraz przydaje się wyprowadzony warunek: $x < \sqrt{2} < 2$, więc $2 - x > 0$. Obie strony są nieujemne, wolno więc podnieść je do kwadratu:

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &\leq 4 - 4x + x^2, \\ 0 &\leq 2x^2 - 4x + 2, \\ 0 &\leq x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny. Wszystkie przejścia były równoważne, co kończy dowód.

Nierówność wolno podnieść do kwadratu stronami tylko wtedy, gdy obie strony są nieujemne. Gdyby $2 - x$ było ujemne, nierówność $\sqrt{2 - x^2} \leq 2 - x$ byłaby po prostu fałszywa – pierwiastek jest nieujemny, więc nie może być mniejszy od liczby ujemnej.

Metoda geometryczna

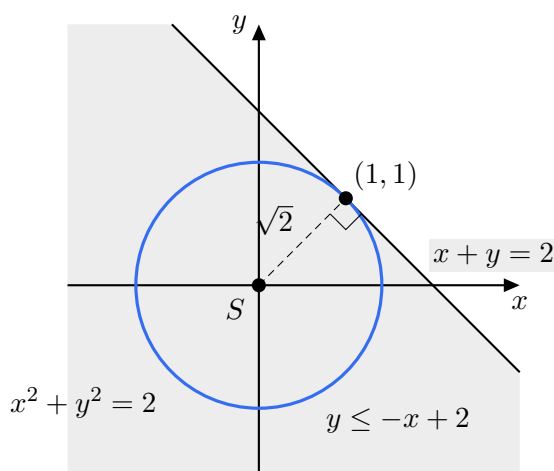
To samo zadanie da się rozwiązać zupełnie inaczej – rysunkiem i geometrią analityczną. Założenie zapisujemy jako

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2.$$

To równanie okręgu o środku $S = (0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$: liczby x i y spełniają założenie wtedy i tylko wtedy, gdy punkt (x, y) leży na tym okręgu. Tezę zapisujemy jako

$$y \leq -x + 2.$$

Ta nierówność opisuje półpłaszczyznę pod prostą $y = -x + 2$, razem z tą prostą. Zadanie mówi więc: każdy punkt okręgu należy do tej półpłaszczyzny.



Tak jest, gdy prosta omija okrąg albo jest do niego styczna. Gdyby przecinała okrąg w dwóch punktach, kawałek okręgu wystawałby ponad nią. O położeniu prostej względem okręgu decyduje odległość środka od prostej: prosta jest styczna, gdy ta odległość jest równa promieniowi.

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest równa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Prostą zapisujemy w postaci ogólnej: $x + y - 2 = 0$, czyli $A = B = 1$ i $C = -2$. Do wartości bezwzględnej wstawiamy współrzędne środka $S = (0, 0)$:

$$d = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r.$$

Prosta jest styczna do okręgu, więc cały okrąg leży w półpłaszczyźnie $y \leq -x + 2$, co kończy dowód.

W tym dowodzie nie korzystamy z założenia, że x i y są dodatnie: nierówność $x + y \leq 2$ zachodzi dla każdego punktu okręgu. Metodę geometryczną rzadko da się zastosować wprost – wśród zadań CKE z tej lekcji tylko tutaj – ale gdy się da, bywa najprostsza do zrozumienia i zostawia mniej miejsc, w których można zapomnieć o jakimś założeniu.

Wielomian czwartego stopnia: kwadraty albo pochodna

MAJ 2015 · ZADANIE NR 8

POZIOM WYKONANIA 22%

W FILMIE 1:03:19

3 PKT

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

Na co zwrócić uwagę. Na pierwszy rzut oka trudno tu zobaczyć wzory skróconego mnożenia – da się, ale wymaga to spostrzegawczości albo doświadczenia. Gdy pomysłu brak, zostaje pochodna.

Sposób I: suma kwadratów. Wyraz x^4 to część kwadratu $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$. Żeby z tego kwadratu dostać $x^4 - x^2 + 3$, trzeba dodać x^2 i 2:

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 1)^2 + x^2 - 2x + 2.$$

Trójmian $x^2 - 2x + 2$ ma wyróżnik $4 - 8 < 0$ i ramiona skierowane do góry, więc jest zawsze dodatni. Można to też zobaczyć bez wyróżnika, rozbijając dwójkę na $1 + 1$:

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2 + 1.$$

Dwa kwadraty są nieujemne, a do nich dodajemy 1, więc całość jest dodatnia.

Sposób II: pochodna. Oznaczamy $f(x) = x^4 - x^2 - 2x + 3$ i liczymy pochodną:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x - 2 = 2(2x^3 - x - 1).$$

Do zbadania znaku trzeba rozłożyć wielomian $2x^3 - x - 1$. Pierwiastek zgadujemy wśród dzielników wyrazu wolnego, czyli ± 1 : dla $x = 1$ wychodzi $2 - 1 - 1 = 0$, więc z twierdzenia Bézouta wielomian dzieli się przez $x - 1$. Tym razem dzielimy pisemnie:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x - 1) : (x - 1) = 2x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2} \\ 2x^2 - x \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ x - 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

Reszta jest równa 0, tak jak przewidywało twierdzenie Bézouta, więc

$$f'(x) = 2(x - 1)(2x^2 + 2x + 1).$$

Trójmian w drugim nawiasie ma wyróżnik $4 - 8 < 0$ i ramiona do góry, więc jest zawsze dodatni. Znak pochodnej zależy zatem tylko od czynnika $x - 1$: dla $x < 1$ pochodna jest ujemna i f maleje, dla $x > 1$ jest dodatnia i f rośnie. Najmniejszą wartość funkcja f przyjmuje dla $x = 1$:

$$f(1) = 1 - 1 - 2 + 3 = 1 > 0.$$

Skoro najmniejsza wartość jest dodatnia, wszystkie wartości f są dodatnie, co kończy dowód.

Warunek z sumą: jedna niewiadoma zamiast dwóch

CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 5

W FILMIE 1:17:12

3 PKT

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a + b} + \frac{1}{a + 2b} \geq \frac{4}{3}.$$

Na co zwrócić uwagę. Z warunku $a + b = 1$ wyznaczamy $b = 1 - a$ i dostajemy nierówność z jedną niewiadomą. Ale b ma być dodatnie, więc $a < 1$ – razem z $a > 0$ daje to $a \in (0, 1)$. To założenie wyprowadzamy sami i będzie potrzebne przy mnożeniu nierówności.

Po wstawieniu $b = 1 - a$ mianowniki się upraszczają: $2a + b = a + 1$ i $a + 2b = 2 - a$, więc

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2-a} \geq \frac{4}{3}.$$

Mnożymy obie strony przez $3(a+1)(2-a)$ – dzięki trójce znika też ułamek po prawej stronie. Dla $a \in (0, 1)$ oba nawiasy są dodatnie, więc zwrot nierówności się nie zmienia; ten komentarz trzeba zapisać w rozwiązaniu.

$$3(2-a) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(2-a),$$

$$9 \geq -4a^2 + 4a + 8,$$

$$4a^2 - 4a + 1 \geq 0.$$

Wyróżnik trójmianu po lewej stronie jest równy $16 - 16 = 0$, więc to kwadrat: $4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, a wszystkie przejścia były równoważne, co kończy dowód.

Można też od razu pomnożyć nierówność z zadania przez oba mianowniki – są dodatnie, bo a i b są dodatnie. Bez tego założenia nie byłoby to dozwolone: mianowniki mogłyby mieć różne znaki. Podstawienie $b = 1 - a$ zostawia jednak mniej liter, a im prostszy rachunek, tym mniejsze ryzyko błędu.

Nierówność z pierwiastkami

CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 8

W FILMIE 1:23:58

4 PKT

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}.$$

Na co zwrócić uwagę. Zadanie za 4 punkty wygląda groźnie, a wystarczy pozbyć się pierwiastków. Obie strony są nieujemne, więc wolno je podnieść do kwadratu.

Po podniesieniu do kwadratu lewa strona traci pierwiastki, a prawą rozpisujemy ze wzoru na kwadrat sumy, pamiętając, że $\sqrt{ac} \cdot \sqrt{bd} = \sqrt{abcd}$:

$$(a+b)(c+d) \geq ac + 2\sqrt{abcd} + bd.$$

Po wymnożeniu nawiasów po lewej stronie ac i bd redukują się z tymi po prawej:

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + 2\sqrt{abcd} + bd \iff ad + bc - 2\sqrt{abcd} \geq 0.$$

Lewą stronę zapisujemy jako kwadrat różnicy – $ad = (\sqrt{ad})^2$, $bc = (\sqrt{bc})^2$, a $\sqrt{abcd} = \sqrt{ad} \cdot \sqrt{bc}$:

$$(\sqrt{ad})^2 - 2\sqrt{ad} \cdot \sqrt{bc} + (\sqrt{bc})^2 = (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0.$$

Kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny, co kończy dowód.

Wzór na kwadrat sumy albo różnicy wraca w prawie każdym zadaniu z tej lekcji: pod koniec rozumowania zwykle pojawia się wyrażenie, które jest kwadratem.

Co zapamiętać

1. **Czułość wobec założeń.** Bywają zapisane słowami („dla dowolnych dodatnich liczb”), a bywa, że trzeba je wyprowadzić samemu – jak $x \in (0, \sqrt{2})$ czy $a \in (0, 1)$. Są potrzebne zwłaszcza wtedy, gdy mnożymy nierówność przez wyrażenie: jego znak musi być znany. Mnożenie przez liczbę dodatnią nie zmienia zwrotu nierówności, przez ujemną go zmienia, a wyrażenie, które może mieć różne znaki, wymaga rozpatrzenia przypadków.
2. **Wzory skróconego mnożenia** – kwadrat sumy i różnicy, różnica kwadratów, suma i różnica sześcianów. Trójmian o wyróżniku zero jest kwadratem.
3. **Wielomiany:** twierdzenie Bézouta, zgadywanie pierwiastka wśród dzielników wyrazu wolnego, dzielenie, rozkład na czynniki. Nierówność do wykazania często okazuje się zadaniem o wielomianach – warto wrócić do lekcji o wielomianach i o funkcji kwadratowej.
4. **Zadanie z parametrem:** gdy nierówność jest kwadratowa względem jednej niewiadomej, drugą można potraktować jak parametr.
5. **Nierówność między średnimi** – szybka, ale dobór liczb wymaga treningu.
6. **Metoda geometryczna** – rzadko da się ją zastosować, ale wtedy bywa najprostsza do zrozumienia i najmniej ryzykowna.

Równania a nierówności. Po podniesieniu obu stron równania do kwadratu mogą dojść rozwiązania, które nie spełniają równania wyjściowego, ale żadne prawdziwe nie zginie. Wystarczy więc na końcu sprawdzić otrzymane rozwiązania w równaniu wyjściowym. W nierówności tak się nie da: przed podniesieniem do kwadratu trzeba wiedzieć, że obie strony są nieujemne.

2

Ćwiczenia

1 Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 3a = 9b^2 + 9b$. Wykaż, że $a = 3b$.

2 Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y takich, że $x > y$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + x^2y \geq y^3 + xy^2.$$

3 Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 \geq 0.$$

4 Wykaż na dwa sposoby, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 1 \geq 0 :$$

a) zapisując lewą stronę jako sumę kwadratów,

b) traktując nierówność jako kwadratową względem y , z parametrem x .

5 Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność

$$x + \frac{9}{x} \geq 6.$$

6 Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{2}{a} \geq 3.$$

7 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - 4x + 3 \geq 0.$$

8 Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - 3x^2 - 2x + 6 > 0.$$

9 Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $a + b = 2$. Wykaż, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$.

10 Liczby rzeczywiste x i y spełniają równość $x^2 + y^2 = 8$. Wykaż, że $x + y \leq 4$.

11 Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}.$$

12 Liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $a + b = 1$. Wykaż, że $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$.

Dodatek

Dlaczego trójmian o wyróżniku zero jest kwadratem

W lekcji kilka razy korzystamy z tego, że trójmian kwadratowy o wyróżniku zero jest kwadratem dwumianu pomnożonym przez współczynnik przy x^2 . Uzasadnieniem jest postać kanoniczna trójmianu: dla $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Gdy $\Delta = 0$, zostaje sam kwadrat:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2, \quad \text{gdzie } x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ to jedyne miejsce zerowe.}$$

Na przykład $4x^2 - 4x + 1$ ma wyróżnik $16 - 16 = 0$ i miejsce zerowe $x_0 = \frac{1}{2}$, więc $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (2x - 1)^2$.

Nierówność między średnimi dla dwóch liczb

Dla dwóch liczb nieujemnych a i b nierówność między średnimi ma krótki dowód. Ponieważ $a = (\sqrt{a})^2$ i $b = (\sqrt{b})^2$,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, czyli $a = b$. Znow kwadrat różnicy. Wersji dla trzech i więcej liczb dowodzi się trudniej; na maturze wystarczy umieć ją zastosować.

13 ★ Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

14 ★ Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b i c zachodzi nierówność $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

15 ★ Wykaż za pomocą nierówności między średnimi, że dla każdej liczby dodatniej a prawdziwa jest nierówność $a^2 + \frac{54}{a} \geq 27$.

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Wszystkie zadania są na dowód – przy każdym jest wskazówka albo szkic rozumowania, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 zadanie na dowód

WSK. Przenieś wszystko na jedną stronę i pogrupuj jak w zadaniu z czerwca 2020.

SZKIC $a^2 - 9b^2 + 3a - 9b = (a - 3b)(a + 3b) + 3(a - 3b) = (a - 3b)(a + 3b + 3) = 0$; drugi czynnik jest dodatni, bo $a, b > 0$, więc $a = 3b$.

2 zadanie na dowód

WSK. Wyłącz czynnik $x - y$ – z założenia jest dodatni.

SZKIC $x^3 + x^2y - y^3 - xy^2 = x^2(x + y) - y^2(x + y) = (x - y)(x + y)^2 \geq 0$.

3 zadanie na dowód

SZKIC $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$.

4 zadanie na dowód

SZKIC a) $(x - y)^2 + (x + 1)^2 \geq 0$. b) $y^2 - 2xy + (2x^2 + 2x + 1) \geq 0$; ramiona do góry, $\Delta(x) = 4x^2 - 4(2x^2 + 2x + 1) = -4(x + 1)^2 \leq 0$.

5 zadanie na dowód

WSK. Pomnóż przez $x > 0$.

SZKIC $x^2 - 6x + 9 \geq 0$, czyli $(x - 3)^2 \geq 0$.

6 zadanie na dowód

WSK. Pomnóż przez $a > 0$ i zgadnij pierwiastek.

SZKIC $a^3 - 3a + 2 \geq 0$; $a = 1$ jest pierwiastkiem i $a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2) \geq 0$, bo

$a + 2 > 0$. Albo nierówność między średnimi dla $a^2, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}$.

7 zadanie na dowód

SZKIC $x^4 - 4x + 3 = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)$, a $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$. Pochodną: $f'(x) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$, najmniejsza wartość $f(1) = 0$.

8 zadanie na dowód

WSK. $3x^2 = 4x^2 - x^2$.

SZKIC $x^4 - 3x^2 - 2x + 6 = (x^2 - 2)^2 + (x - 1)^2 + 1 > 0$.

9 zadanie na dowód

WSK. Wyznacz $b = 2 - a$ i ustal, do jakiego przedziału należy a .

SZKIC $a \in (0, 2)$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{2-a} = \frac{2}{a(2-a)} \geq 2$; po pomnożeniu przez $a(2 - a) > 0$: $1 \geq 2a - a^2$, czyli $(a - 1)^2 \geq 0$.

10 zadanie na dowód

WSK. Okrąg o promieniu $2\sqrt{2}$ i prosta $x + y = 4$.

SZKIC Odległość środka $(0, 0)$ od prostej $x + y - 4 = 0$ to $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, czyli promień – prosta jest styczna, cały okrąg leży w półpłaszczyźnie $y \leq -x + 4$. Algebraicznie: $2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 = (x - y)^2 \geq 0$, więc $(x + y)^2 \leq 16$.

11 zadanie na dowód

WSK. Obie strony są dodatnie – podnieś do

kwadratu.

SZKIC $a + b + 2\sqrt{ab} \leq 2a + 2b$, czyli
 $0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

12 zadanie na dowód

SZKIC $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) =$
 $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab = 1 - 3ab$.

Dodatek

13 zadanie na dowód

SZKIC $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, a $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 =$
 $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$. Albo nierówność między średnimi

dla każdego nawiasu osobno.

14 zadanie na dowód

SZKIC $2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$
 $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$.

15 zadanie na dowód

WSK. Rozbij $\frac{54}{a}$ na dwie równe części.

SZKIC Dla liczb $a^2, \frac{27}{a}, \frac{27}{a}$: ich suma $\geq$
 $3\sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{27}{a} \cdot \frac{27}{a}} = 3\sqrt[3]{729} = 27$. Sprawdzenie:
 $a^3 - 27a + 54 = (a - 3)^2(a + 6) \geq 0$.