



LOGARYTMY I WYKŁADNICZA

Logarytmy i funkcja wykładnicza · matura rozszerzona

ZAKRES

MATURY 2015–2026

04



TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

 [Zobacz kurs](#) 

DODATKOWE MATERIAŁY

 [Wszystkie materiały](#) 

 [Autorskie arkusze próbne](#) 

 [Krótkie filmy](#) 

 [Dłuższe filmy](#) 

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

 [Dołącz](#)

Spis treści

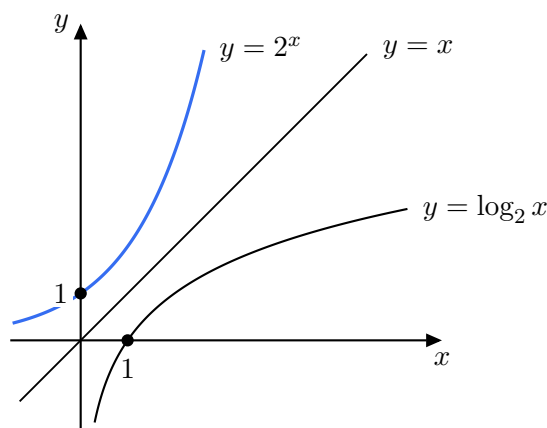
1.	Niezbędnik logarytmów i funkcji wykładniczej	4
	Wzrost liniowy, logarytmiczny i wykładniczy	4
	Skala liniowa i skala logarytmiczna	5
	Skala Richtera	6
	Działania na potęgach	7
	Definicja logarytmu	8
	Trzy sposoby obliczania logarytmu	9
	Logarytm i potęga znoszą się nawzajem	9
	Dlaczego logarytm rośnie coraz wolniej	10
	Legenda o szachownicy i lokata	11
	Własności logarytmów	12
	Sumy i różnice potęg	12
	Wzór na zamianę podstawy logarytmu	13
	Co z tego trzeba umieć na maturze	13
	Model wykładniczy: o ile procent rośnie populacja	14
	Dowód z dwoma parametrami	15
	Zamiana na logarytmy dziesiętne	16
	Logarytmy o trzech różnych podstawach	17
2.	Ćwiczenia	18
3.	Dodatek	20
	Dowód wzoru na logarytm iloczynu	20
	Odpowiedzi i krótkie rozwiązania	21

Niezbędnik logarytmów i funkcji wykładniczej

Ten rozdział idzie tą samą drogą co lekcja. Zaczynamy od tego, czym różnią się od siebie **wzrost liniowy, logarytmiczny i wykładniczy**, i od dwóch zastosowań: **skali logarytmicznej** na wykresach oraz **skali Richtera**. Potem **działania na potęgach**, **definicja logarytmu** i trzy sposoby liczenia logarytmu, dalej logarytm jako działanie odwrotne do potęgowania, założenia i to, dlaczego logarytm rośnie coraz wolniej. Legenda o szachownicy pokazuje, jak szacować ogromne potęgi bez kalkulatora. Na koniec **własności logarytmów** i **wzór na zamianę podstawy**, a z nimi cztery zadania CKE – każda ramka z zadaniem ma plakietkę z momentem w filmie.

Wzrost liniowy, logarytmiczny i wykładniczy

O wielkości, która „rośnie wykładniczo”, słychać często, o takiej, która „rośnie logarytmicznie” – rzadziej. To dwa bieguny: **funkcja wykładnicza** o podstawie większej od 1 rośnie coraz szybciej, **logarytm** o takiej podstawie – coraz wolniej, a funkcja liniowa rośnie w stałym tempie. Pomiedzy nimi leży wzrost wielomianowy: wielomian może przez jakiś czas wyprzedzać funkcję wykładniczą, ale ta w końcu go przegania. W informatyce tak samo opisuje się złożoność algorytmów – logarytmiczną, wielomianową albo wykładniczą – i od tego zależy, czy algorytm w ogóle opłaca się stosować.



WZROST WYKŁADNICZY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:37

Jedna bakteria dzieli się na dwie, każda z nich znowu na dwie i tak dalej. Ile będzie bakterii po 12 podziałach?

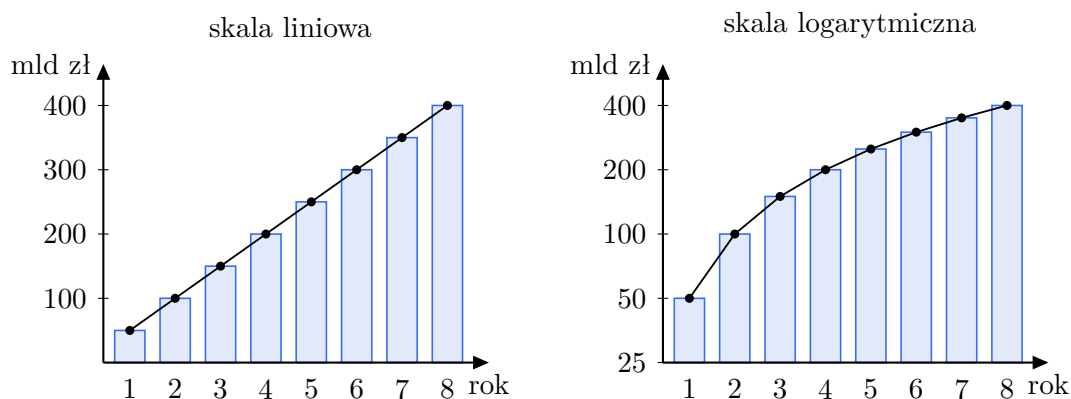
- I Każdy podział podwaja liczbę bakterii: 1, 2, 4, 8, ... – po n podziałach jest ich 2^n .
- II Po 12 podziałach: $2^{12} = 4096$ bakterii z jednej.

W rzeczywistości część bakterii po drodze ginie, więc kolonia rośnie dużo wolniej. Dokładny opis takiego wzrostu wymaga równań różniczkowych – to już daleko poza maturą.

Skala liniowa i skala logarytmiczna

Na zwykłej, **liniowej** osi równe odstępys oznaczają równe *różnice*: od 100 do 200 jest tak samo daleko jak od 300 do 400. Na osi **logarytmicznej** równe odstępys oznaczają równe *ilorazy*: od 50 do 100 jest tak samo daleko jak od 200 do 400, bo za każdym razem wartość się podwaja. Skala logarytmiczna pokazuje więc wzrost **względny**, a nie przyrost w sztukach czy złotych.

Przykład z lekcji (4:19): PKB pewnego kraju rośnie co roku o 50 mld zł.



rok	1	2	3	4	5	6	7	8
PKB, mld zł	50	100	150	200	250	300	350	400
wzrost w roku	–	+100%	+50%	+33,3%	+25%	+20%	+16,7%	+14,3%

Na skali liniowej słupki rosną równo i wygląda to na stały wzrost. Skala logarytmiczna pokazuje to, co widać w tabeli: z roku na rok wzrost względny maleje, ze 100% do 14,3%. Dlatego zjawiska gospodarcze, takie jak wzrost PKB, pokazuje się zwykle na skali logarytmicznej. Wykres na skali

liniowej łatwo tu odczytać na opak – zanim wyciągnie się wniosek z wykresu, warto sprawdzić, jaką skalę ma jego oś.

Odwrotnie jest z szachownicą (5:51), na której każde kolejne pole dostaje dwa razy więcej ziaren ryżu niż poprzednie: 1, 2, 4, 8, ... Na skali liniowej słupki rosną lawinowo, a na logarytmicznej – równymi schodkami, bo za każdym razem wzrost wynosi 100%.

CIĄGI NA DWÓCH SKALACH

Ciąg arytmetyczny (stała różnica, jak +50 mld zł rocznie) rośnie równymi schodkami na skali liniowej. Ciąg geometryczny (stały iloraz, jak $\times 2$ na szachownicy) rośnie równymi schodkami na skali logarytmicznej.

Skala Richtera

W uproszczeniu skala Richtera opisuje **amplitudę drgań** zarejestrowanych podczas trzęsienia ziemi i jest określona **logarytmem dziesiętnym**. Z magnitudy da się też odczytać, ile energii wyzwoliło trzęsienie.

SKALA RICHTERA W UPROSZCZENIU

Magnituda M to logarytm dziesiętny ilorazu amplitudy A przez amplitudę wzorcową $A_0 = 0,001$ mm, czyli jeden mikrometr:

$$M = \log_{10} \frac{A}{A_0}, \quad \text{czyli} \quad A = A_0 \cdot 10^M.$$

Magnituda większa o 1 oznacza amplitudę 10 razy większą i energię $10^{1,5} = \sqrt{1000} \approx 31,6$ razy większą.

Skala nie kończy się więc na 10 i może być ujemna: magnituda -1 to amplituda 10 razy mniejsza niż przy 0. Powyżej 10 amplituda to już tylko liczba ze wzoru, a nie wychylenie, jakie dałoby się zmierzyć – za to energia mówi, co by się działo.

Tak samo jest w każdej skali określonej logarytmem. Gdyby skalę określić logarytmem o podstawie 3, krok o 1 w górę oznaczałby wartość 3 razy większą, a krok o 1 w dół – 3 razy mniejszą.

magnituda	amplituda	dla porównania
-7		energia muchy w locie
-2		energia kota zeskakującego z komody
0	0,001 mm	
1	0,01 mm	
2	0,1 mm	grubość włosa
3	1 mm	drobne wstrząsy
4	1 cm	wyraźnie odczuwalne wstrząsy
5	10 cm	lokalne szkody
6	1 m	
8	100 m	bardzo silne trzęsienie ziemi
9	1 km	najsilniejsze zanotowane trzęsienia ziemi
10	10 km	
15		energia, która odparowałaby oceany
ponad 18		energia, która rozbiłaby Ziemię na kawałki

Porównania energii za filmem xkcd What If? „What would a magnitude 15 earthquake be like?” (Randall Munroe).

Działania na potęgach

Każda własność logarytmów ma swoją parę wśród własności potęg, więc zanim przejdziemy do logarytmów – krótkie przypomnienie.

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

Dla $a > 0$ i dowolnych liczb rzeczywistych x, y (przy wykładnikach całkowitych wystarczy $a \neq 0$):

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, np. $2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$;
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, np. $\frac{2^7}{2^5} = 2^2$;
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, np. $(2^5)^2 = 2^{10}$;
- $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, np. $5^{-1} = \frac{1}{5}$ i $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

Dlaczego $a^0 = 1$? Wzór na iloraz daje $\frac{2^1}{2^1} = 2^{1-1} = 2^0$, a przecież $\frac{2}{2} = 1$. Żeby wzór był prawdziwy także wtedy, 2^0 musi być równe 1. To nie jest umowa wzięta z sufitu: im bliżej zera wykładnik, tym bliżej jedynki potęga – $2^{0,1} \approx 1,072$, $2^{0,01} \approx 1,007$, $2^{0,001} \approx 1,0007$. Wyjątkiem jest 0^0 – to wyrażenie nie ma sensu.

Definicja logarytmu

DEFINICJA LOGARYTMU

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ i $b > 0$:

$$\log_a b = c \quad \Longleftrightarrow \quad a^c = b.$$

Logarytm $\log_a b$ to wykładnik, do którego trzeba podnieść podstawę a , żeby otrzymać b . W szczególności $\log_a 1 = 0$, bo $a^0 = 1$, oraz $\log_a a = 1$, bo $a^1 = a$.

DEFINICJA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 18:34

Obliczmy $\log_2 8$.

- I Z definicji $\log_2 8 = x$ oznacza $2^x = 8$.
- II $8 = 2^3$, więc $2^x = 2^3$ i stąd $x = 3$. Wolno tak porównać wykładniki, bo funkcja wykładnicza jest **różnowartościowa**: różnym wykładnikom odpowiadają różne potęgi. Z kwadratem tak nie wolno – z $x^2 = 3^2$ wynika $x = 3$ lub $x = -3$.

Nie każdy logarytm wychodzi tak okrągło: $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną, bo żadna potęga dwójki o wykładniku wymiernym nie daje 3.

Trzy sposoby obliczania logarytmu

OBLICZANIE LOGARYTMU

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 20:31

Obliczmy $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8}$ na trzy sposoby.

I Łańcuch potęg. Podnosimy $\sqrt{2}$ kolejno do potęg, aż dojdziemy do $\frac{1}{8}$:

$$\sqrt{2} \xrightarrow{\text{do potęgi } 2} 2 \xrightarrow{\text{do potęgi } 3} 8 \xrightarrow{\text{do potęgi } -1} \frac{1}{8}.$$

Przy potęgowaniu potęgi wykładniki się mnożą: $2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$. Tak da się liczyć prostsze logarytmy w pamięci.

II Liczba logarytmowana jako potęga podstawy. Skoro $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ i $2 = (\sqrt{2})^2$, to $\frac{1}{8} = ((\sqrt{2})^2)^{-3} = (\sqrt{2})^{-6}$. Pytamy więc, do której potęgi podnieść $\sqrt{2}$, żeby otrzymać $(\sqrt{2})^{-6}$ – odpowiedź jest w pytaniu: -6 .

III Równanie z definicji. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = x$ oznacza $(\sqrt{2})^x = \frac{1}{8}$. Wszystko zapisujemy jako potęgi dwójki: $2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-3}$, więc $\frac{1}{2}x = -3$ i $x = -6$.

Każdy sposób daje $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = -6$.

Logarytm i potęga znoszą się nawzajem

Logarytmowanie to działanie odwrotne do potęgowania, tak jak dzielenie do mnożenia. Jak to bywa z działaniami odwrotnymi, jedno jest łatwe, drugie trudniejsze: potęgę policzymy od ręki, logarytm – nie zawsze.

LOGARYTM I POTĘGA O TEJ SAMEJ PODSTAWIE

Dla $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a a^x = x \text{ dla każdego } x, \quad a^{\log_a x} = x \text{ dla } x > 0.$$

Pierwsza równość. Do której potęgi podnieść 2, żeby otrzymać 2^5 ? Do piątej: $\log_2 2^5 = 5$ – odpowiedź jest w pytaniu. Logarytm o podstawie 2 oddaje wykładnik, do którego podniesiono dwójkę.

Druga równość też wynika wprost z definicji, choć na początku trudniej ją przyswoić. $\log_2 5$ to wykładnik, do którego trzeba podnieść 2, żeby otrzymać 5. Jeśli więc podniesiemy 2 właśnie

do tej potęgi, dostaniemy 5:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Sprawdzenie na liczbach, które da się policzyć: $2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$. Podstawy potęgi i logarytmu muszą być te same.

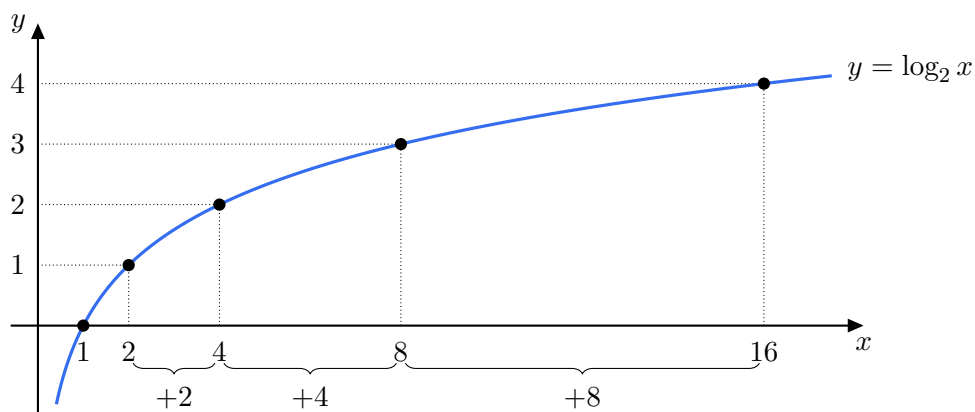
Na rysunku z pierwszej sekcji wykresy $y = 2^x$ i $y = \log_2 x$ są symetryczne względem prostej $y = x$ – tak wyglądają wykresy funkcji wzajemnie odwrotnych.

Skąd założenia. W $\log_a x$ zakładamy $x > 0$, $a > 0$ i $a \neq 1$.

- $x > 0$: liczba dodatnia podniesiona do dowolnej potęgi daje liczbę dodatnią, więc żadna potęga podstawy nie da zera ani liczby ujemnej.
- $a > 0$: potęgą liczby ujemnej nie zawsze ma sens, np. $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ nie istnieje.
- $a \neq 1$: $1^c = 1$ dla każdego c , więc logarytm o podstawie 1 dałoby się „policzyć” tylko z jedynki – i wtedy pasowałaby każda liczba.

Dlaczego logarytm rośnie coraz wolniej

Logarytmy kolejnych potęg dwójki to kolejne liczby naturalne: $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 16 = 4$. Żeby logarytm wzrósł z 1 do 2, liczba logarytmowana musi przejść od 2 do 4, czyli o 2. Następny wzrost o 1 wymaga drogi od 4 do 8, czyli o 4, a kolejny – od 8 do 16, o 8. Każdy następny stopień kosztuje dwa razy więcej niż poprzedni.



Tak samo bywa z nauką języka obcego. Przejście z poziomu A1 na A2 zajmuje, powiedzmy, 100 godzin, następny poziom – 200, kolejny – 400, a na samą górę trzeba już 1000 godzin, choć za każdym razem to „tylko” jeden poziom wyżej.

Dotyczy to logarytmu o podstawie $a > 1$ – wtedy logarytm jest rosnący, a funkcja wykładnicza o tej podstawie rośnie coraz szybciej. Dla podstawy z przedziału $(0, 1)$ obie funkcje są malejące.

Legenda o szachownicy i lokata

Według indyjskiej legendy mędrzec Sissa ibn Dahir wynalazł szachy i pokazał je królowi. Zachwycony król obiecał mu nagrodę, jakiej tylko zażąda. Mędrzec poprosił o ryż: jedno ziarno na pierwszym polu szachownicy, dwa na drugim, cztery na trzecim i na każdym następnym polu dwa razy więcej niż na poprzednim. W lekcji zamiast ziaren są grosze.

SZACOWANIE POTĘG

PRZYKŁAD Z LEKCJI • 37:23

Na pierwszym polu szachownicy leży 1 grosz, a na każdym następnym dwa razy więcej niż na poprzednim. Ile pieniędzy leży na ostatnim polu? Bez kalkulatora.

- I Na polu numer n leży 2^{n-1} groszy: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, ... Ostatnie, 64. pole ma więc 2^{63} groszy – nie 2^{64} .
- II Do szacowania przydaje się $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$.
- III Rozkładamy wykładnik tak, żeby pojawiło się 2^{10} , i szacujemy z niedomiarem:

$$2^{63} = 2^3 \cdot 2^{60} = 8 \cdot (2^{10})^6 = 8 \cdot 1024^6$$

$$> 8 \cdot 1000^6 = 8 \cdot (10^3)^6 = 8 \cdot 10^{18}.$$
- IV $8 \cdot 10^{18}$ groszy to $8 \cdot 10^{16}$ zł. Miliard to 10^9 , więc to $8 \cdot 10^7$ miliardów, czyli **80 milionów miliardów złotych** – niemal 200 razy więcej niż roczny PKB wszystkich krajów świata razem.

Na całej szachownicy leży prawie dwa razy tyle co na ostatnim polu. Funkcja wykładnicza rośnie gwałtownie nawet przy podstawie niewiele większej od 1. Wzrost o 10% to mnożenie przez 1,1, bo $x + 10\% \cdot x = x + \frac{1}{10}x = 1,1x$. Na lokacie, która co roku dolicza 10%, kwota x po n latach wynosi więc $x \cdot 1,1^n$. Na początku rośnie powoli, ale

$$1,1^{10} \approx 2,59, \quad 1,1^{20} \approx 6,73, \quad 1,1^{100} \approx 13\,781$$

– po stu latach kwota byłaby prawie 14 tysięcy razy większa.

Własności logarytmów

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ i dowolnej liczby rzeczywistej m – obok każdego wzoru jego para wśród własności potęg:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \qquad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Dodawanie logarytmów o tej samej podstawie zamienia się w mnożenie liczb logarytmowanych – tak jak mnożenie potęg o tej samej podstawie zamienia się w dodawanie wykładników. To nie przypadek: wzory na logarytmy wynikają ze wzorów na potęgi (dowód pierwszego jest w Dodatku).

Trzeci wzór stosujemy w obie strony: wykładnik może „wyskoczyć” przed logarytm albo „wskoczyć” do środka. W lekcji nazywamy to **twierdzeniem hop**.

Logarytm bez podstawy to **logarytm dziesiętny**: $\log x = \log_{10} x$. Wzory są ze sobą spójne – na przykład $2 \log 5$ można policzyć na dwa sposoby:

$$2 \log 5 = \log 5^2 = \log 25 \qquad \text{oraz} \qquad 2 \log 5 = \log 5 + \log 5 = \log (5 \cdot 5) = \log 25.$$

Sumy i różnice potęg

Nie ma wzoru na sumę potęg – ale jednakowe składniki liczy się jak jabłka.

POTĘGI

PRZYKŁAD Z LEKCJI • 49:52

Zapiszmy jako jedną potęgę: $4^{10} + 4^{10} + 4^{10} + 4^{10}$ oraz $2^{20} - 2^{19}$.

- I Cztery jednakowe składniki to cztery sztuki: $x + x + x + x = 4x$. Tu $x = 4^{10}$, więc $4^{10} + 4^{10} + 4^{10} + 4^{10} = 4 \cdot 4^{10} = 4^1 \cdot 4^{10} = 4^{11}$.
- II $2^{20} = 2 \cdot 2^{19}$, czyli dwie sztuki 2^{19} . Zabieramy jedną i zostaje jedna: $2^{20} - 2^{19} = 2 \cdot 2^{19} - 2^{19} = 2^{19}$.

Wzór na zamianę podstawy logarytmu

WZÓR NA ZAMIANĘ PODSTAWY

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ oraz nowej podstawy $c > 0$, $c \neq 1$:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Liczba logarytmowana trafia do licznika, stara podstawa – do mianownika.

Nowa podstawa może być dowolna, byle spełniała założenia:

$$\log_2 7 = \frac{\log_5 7}{\log_5 2} = \frac{\log_8 7}{\log_8 2} = \frac{\log_\pi 7}{\log_\pi 2} = \frac{\log 7}{\log 2}.$$

W praktyce najwygodniej przejść na logarytm dziesiętny – jest najmniej pisania.

Postać iloczynowa. Po pomnożeniu pierwszej równości przez $\log_5 2$ dostajemy

$$\log_5 2 \cdot \log_2 7 = \log_5 7.$$

Dwójka, która jest liczbą logarytmowaną w pierwszym czynniku i podstawą w drugim, „znika” – podobnie jak przy mnożeniu ułamków $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{5}$.

Zamiana miejscami daje liczbę odwrotną. Jako nową podstawę można wziąć samą liczbę logarytmowaną:

$$\log_5 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 5} = \frac{1}{\log_7 5}, \quad \text{czyli} \quad \log_5 7 \cdot \log_7 5 = 1,$$

tak jak $\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 1$.

Co z tego trzeba umieć na maturze

Definicja, liczenie logarytmów i trzy własności z poprzednich sekcji to materiał poziomu podstawowego – na rozszerzeniu trzeba je mieć opanowane. Dochodzą do nich **wzór na zamianę podstawy** i równość $a^{\log_a x} = x$, na przykład $5^{\log_5 \pi} = \pi$: $\log_5 \pi$ to wykładnik, do którego trzeba podnieść 5, żeby otrzymać π .

Wzory w głowie, nie w tablicach. Pole trójkąta o podstawie 10 i wysokości 5 liczy się w pamięci – nikt nie wypisuje $a = 10$, $h = 5$ i nie podstawia do wzoru. Tak ma być z logarytmami: kto przerobił dużo przykładów, od razu widzi, który wzór zastosować. Kto co chwilę zagląda do tablic, jest jak ktoś, kto pierwszy raz składa mebel z instrukcją – traci czas, a tablice i tak nie podsuną mu pomysłu na rozwiązanie.

Model wykładniczy: o ile procent rośnie populacja

Od 2023 roku w arkuszach pojawiają się zadania z funkcją wykładniczą w kontekście realistycznym. Dużo w nich czytania ze zrozumieniem, mało rachunków.

MAJ 2025 • ZADANIE NR 1

POZIOM WYKONANIA 77%

W FILMIE 1:00:34

2 PKT

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t, \text{ dla } t \geq 0$$

gdzie:

- N_0 – liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,
- k – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,
- t – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625.

Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny. Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. N_0 to liczebność w chwili 0, więc $N(0) = N_0 = 10\,000$, a po dwóch godzinach $N(2) = N_0 \cdot k^2 = 15\,625$. Po podzieleniu drugiej równości przez pierwszą N_0 się skraca:

$$k^2 = \frac{N(2)}{N(0)} = \frac{15\,625}{10\,000} = 1,5625, \quad k = 1,25,$$

bo k jest dodatnie. Co godzinę liczebność mnoży się przez k – gdyby k było równe 2, populacja co godzinę by się podwajała, czyli rosła o 100%. Mnożenie przez 1,25 to wzrost o 25%, a nie o 125%. **Odpowiedź:** o 25% na godzinę.

Dowód z dwoma parametrami

Typowe maturalne zadanie z logarytmów: wiedząc, ile wynoszą jakieś logarytmy, wykaż równość. Tu parametry są dwa.

MAJ 2024 · ZADANIE NR 5

POZIOM WYKONANIA 62%

W FILMIE 1:05:46

3 PKT

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to

$$\log_{12} 80 = \frac{2a + 1}{a \cdot (1 + b)}.$$

Na co zwrócić uwagę. Liczby a i b są niewymierne – nie da się ich obliczyć i wstawić. Zamiast tego wstawiamy do prawej strony to, czym są, i sprowadzamy osobno licznik i mianownik do jednego logarytmu. Jedynekę zapisujemy jako logarytm o potrzebnej podstawie:

$$2a + 1 = 2\log_5 4 + \log_5 5 = \log_5 16 + \log_5 5 = \log_5 80,$$

$$a(1 + b) = \log_5 4 \cdot (\log_4 3 + \log_4 4) = \log_5 4 \cdot \log_4 12 = \log_5 12.$$

Ostatnia równość to wzór na zamianę podstawy w postaci iloczynowej. Ten sam wzór, czytany od prawej do lewej, kończy dowód:

$$\frac{2a + 1}{a(1 + b)} = \frac{\log_5 80}{\log_5 12} = \log_{12} 80.$$

Na maturze nie piszemy, że czwórki „się skróciły”. W głowie wolno tak myśleć, ale w rozwiązaniu zapisujemy przejście i powołujemy się na wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zamiana na logarytmy dziesiętne

Gdy w zadaniu jest jeden parametr, sprawdza się inny sposób: wszystkie logarytmy zamieniamy na dziesiętne.

CZERWIEC 2021 · ZADANIE NR 6

W FILMIE 1:11:52

3 PKT

Niech $\log_2 9 = c$. Wykaż, że

$$\log_3 54 = \frac{3c + 2}{c}.$$

Na co zwrócić uwagę. Ze wzoru na zamianę podstawy

$$c = \log_2 9 = \frac{\log 9}{\log 2} = \frac{2 \log 3}{\log 2}, \quad \text{stąd} \quad \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{2}{c}.$$

W lewej stronie tezy rozkładamy 54 tak, żeby wyluskać możliwie dużą potęgę trójki: $54 = 27 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2$. Ułamek o sumie w liczniku rozbijamy na dwa, tak jak $\frac{1+7}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}$:

$$\begin{aligned} \log_3 54 &= \frac{\log(27 \cdot 2)}{\log 3} = \frac{3 \log 3 + \log 2}{\log 3} \\ &= 3 + \frac{\log 2}{\log 3} = 3 + \frac{2}{c} = \frac{3c + 2}{c}. \end{aligned}$$

Logarytmy o trzech różnych podstawach

Trudniejsze zadanie: trzy podstawy naraz i pytanie o wszystkie możliwe wartości. Klucz to znowu logarytmy dziesiętne.

LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 10

W FILMIE 1:16:24

4 PKT

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1$, $b > 1$ i $N > 1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2b} N = \frac{3}{20} \cdot (\log_a N + \log_b N)$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

Na co zwrócić uwagę. Po zamianie na logarytmy dziesiętne

$$\frac{\log N}{\log(a^2b)} = \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{\log N}{\log a} + \frac{\log N}{\log b} \right).$$

Dzielimy obie strony równania przez $\log N$ – wolno, bo $N > 1$, więc $\log N \neq 0$. Oznaczamy $x = \log a$ i $y = \log b$; obie liczby są dodatnie, bo $a > 1$ i $b > 1$. Szukamy $\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{y}{x}$:

$$\frac{1}{2x + y} = \frac{3}{20} \cdot \frac{x + y}{xy}, \quad \text{czyli} \quad 20xy = 3(x + y)(2x + y).$$

Dzielimy obie strony równania przez x^2 , a po prawej dzielimy przez x każdy z dwóch nawiasów i w każdym pojawia się $t = \frac{y}{x}$:

$$20t = 3(1 + t)(2 + t), \quad \text{czyli} \quad 3t^2 - 11t + 6 = 0.$$

Zamiast liczyć Δ , zgadujemy pierwiastek wśród dzielników wyrazu wolnego: $t = 3$. Ze wzorów Viète'a $t_1 t_2 = \frac{6}{3} = 2$, więc drugi pierwiastek to $\frac{2}{3}$. Oba są możliwe: dla $a > 1$ liczby $b = a^3$ i $b = a^{\frac{2}{3}}$ też są większe od 1. **Odpowiedź:** $\log_a b = 3$ lub $\log_a b = \frac{2}{3}$.

2

Ćwiczenia

1 Oblicz.

a) $\log_2 32$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

e) $\log 0,001$

g) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4}$

b) $\log_3 \frac{1}{27}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 9$

f) $\log_7 \sqrt[5]{7}$

h) $\log_5 (25\sqrt{5})$

2 Oblicz.

a) $3^{\log_3 7}$

c) $4^{\log_2 3}$

e) $9^{\log_3 2+1}$

b) $10^{\log 5}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$

f) $2^{3+\log_2 5}$

3 Rozwiąż równanie.

a) $\log_x 16 = 4$

c) $\log_2 (x - 1) = 3$

e) $\log_5 (x^2 - 1) = 1$

b) $\log_3 x = -2$

d) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

f) $\log_x \frac{1}{27} = -3$

4 Oblicz, korzystając z własności logarytmów.

a) $\log_6 4 + \log_6 9$

c) $2 \log 5 + \log 4$

e) $\frac{1}{2} \log_2 64$

b) $\log_3 54 - \log_3 2$

d) $\log_2 48 - \log_2 3$

f) $3 \log_4 2 + \log_4 8$

5 Oblicz, korzystając ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu.

a) $\log_4 8$

c) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

e) $\log_3 5 \cdot \log_{25} 9$

b) $\log_9 27$

d) $\log_5 7 \cdot \log_7 25$

f) $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$

6 Wiadomo, że $\log_2 3 = a$. Wyraż za pomocą a :

a) $\log_2 12$

c) $\log_3 2$

e) $\log_9 8$

b) $\log_2 18$

d) $\log_6 12$

f) $\log_3 24$

7 Wykaż.

a) Jeżeli $\log_2 5 = a$, to $\log_{20} 25 = \frac{2a}{a+2}$.

b) Jeżeli $\log_3 2 = a$ oraz $\log_3 5 = b$, to $\log_6 15 = \frac{1+b}{1+a}$.

c) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{15} 16 = 4$.

d) Jeżeli $\log_5 2 = a$ oraz $\log_5 3 = b$, to $\log_6 40 = \frac{3a+1}{a+b}$.

8 Rozwiąż zadanie.

a) Liczebność populacji bakterii opisuje wzór $N(t) = N_0 \cdot k^t$, gdzie t to czas w godzinach, a $k > 0$. Po trzech godzinach populacja była 8 razy liczniejsza niż na początku. O ile procent rosła w ciągu każdej godziny?

b) Masa substancji promieniotwórczej po t dniach wynosi $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Po 30 dniach zostało 12,5% masy początkowej. Oblicz T .

c) Kwota na lokacie rośnie co roku o 10%. Po ilu pełnych latach po raz pierwszy przekroczy dwukrotność wpłaty?

9 Oszacuj potęgi dwójki.

a) Uzasadnij bez kalkulatora, że $2^{100} > 10^{30}$.

b) Przyjmij $\log 2 \approx 0,3010$ i wyznacz, ile cyfr mają liczby 2^{100} i 2^{64} .

10 Gdy magnituda rośnie o 1, amplituda rośnie 10 razy, a energia $10^{1,5}$ razy.

a) Ile razy większa jest amplituda drgań przy magnitudzie 7 niż przy magnitudzie 4?

b) Ile razy więcej energii wyzwala trzęsienie o magnitudzie 8 niż o magnitudzie 6?

c) Jedno trzęsienie wyzwala 100 razy więcej energii niż drugie. O ile różnią się ich magnitudy?

11 Zapisz jako jedną potęgę, w podpunkcie d) – jako potęgę dwójki.

a) $3^{20} + 3^{20} + 3^{20}$

b) $4 \cdot 5^{10} + 5^{10}$

c) $2^{30} - 2^{29}$

d) $4^{15} + 4^{15}$

Dodatek

Dowód wzoru na logarytm iloczynu

W szkole dowody wzorów na logarytmy często się pomija, a na rozszerzeniu warto rozumieć, skąd się biorą. Dowód z lekcji (45:55).

Niech $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ i $y > 0$. Z definicji $\log_a(xy)$ to wykładnik, do którego trzeba podnieść a , żeby otrzymać xy . Wystarczy więc sprawdzić, że liczba $\log_a x + \log_a y$ ma tę samą własność:

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y.$$

Pierwsza równość to wzór na iloczyn potęg czytany od prawej do lewej – tak jak $2^{5+3} = 2^5 \cdot 2^3$; druga to równość $a^{\log_a x} = x$. Liczba $\log_a x + \log_a y$ jest więc wykładnikiem, do którego trzeba podnieść a , żeby otrzymać xy . Taki wykładnik jest tylko jeden, bo funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, zatem

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy).$$

Dowód pokazuje też, skąd się biorą pary wzorów z sekcji o własnościach: wzór na logarytm iloczynu wynika wprost ze wzoru na iloczyn potęg. Pozostałe wzory dowodzi się podobnie.

12 ★ Udowodnij, że dla $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ i $y > 0$ zachodzi równość $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$.

13 ★ Udowodnij, że dla $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ i dowolnej liczby rzeczywistej m zachodzi równość $\log_a x^m = m \cdot \log_a x$.

14 ★ Udowodnij wzór na zamianę podstawy logarytmu: dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$ zachodzi równość $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Do każdego zadania wynik i szkic rozwiązania: sam klucz, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 ODP. a) 5; b) -3; c) -3; d) 4; e) -3; f) $\frac{1}{5}$; g) -4; h) $\frac{5}{2}$.

SZKIC Liczbę logarytmowaną zapisujemy jako potęgę podstawy. c) $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. d) $9 = (\sqrt{3})^4$. e) $0,001 = 10^{-3}$. f) $\sqrt[5]{7} = 7^{\frac{1}{5}}$. g) $\frac{1}{4} = 2^{-2} = (\sqrt{2})^{-4}$. h) $25\sqrt{5} = 5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{5}{2}}$.

2 ODP. a) 7; b) 5; c) 9; d) $\frac{1}{5}$; e) 36; f) 40.

SZKIC Korzystamy z $a^{\log_a x} = x$. c) $4^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2$. d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{-1} = 5^{-1}$. e) $9^{\log_3 2} \cdot 9 = (3^{\log_3 2})^2 \cdot 9 = 4 \cdot 9$. f) $2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5$.

3 ODP. a) 2; b) $\frac{1}{9}$; c) 9; d) 4; e) $-\sqrt{6}, \sqrt{6}$; f) 3.

SZKIC Korzystamy z definicji i pilnujemy założeń. a) $x^4 = 16, x > 0, x \neq 1$. b) $x = 3^{-2}$. c) $x - 1 = 2^3$. d) $x^{\frac{3}{2}} = 8$, więc $x = 8^{\frac{2}{3}} = 4$. e) $x^2 - 1 = 5$; dla obu liczb $x^2 - 1 > 0$. f) $x^{-3} = 3^{-3}$.

4 ODP. a) 2; b) 3; c) 2; d) 4; e) 3; f) 3.

SZKIC a) $\log_6 36$. b) $\log_3 27$. c) $\log 25 + \log 4 = \log 100$. d) $\log_2 16$. e) $\log_2 64^{\frac{1}{2}} = \log_2 8$. f) $\log_4 2^3 + \log_4 8 = \log_4 64$.

5 ODP. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{2}$; c) 3; d) 2; e) 1; f) 1.

SZKIC a) $\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$. b) $\frac{\log_3 27}{\log_3 9}$. c), d) Postać iloczynowa: $\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 8, \log_5 7 \cdot \log_7 25 = \log_5 25$. e) $\log_{25} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 25} = \frac{2}{2\log_3 5}$ – liczba odwrotna do $\log_3 5$. f) $\frac{1}{\log_a 6} = \log_6 a$, więc $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6$.

6 ODP. a) $2 + a$; b) $1 + 2a$; c) $\frac{1}{a}$; d) $\frac{2+a}{1+a}$; e) $\frac{3}{2a}$; f) $\frac{3+a}{a}$.

SZKIC a) $\log_2 (4 \cdot 3)$. b) $\log_2 (2 \cdot 9) = 1 + 2\log_2 3$. c) Liczba odwrotna do $\log_2 3$. d) $\frac{\log_2 12}{\log_2 6}$, a $\log_2 6 = 1 + a$. e) $\frac{\log_2 8}{\log_2 9}$. f) $\frac{\log_2 24}{\log_2 3}$, a $\log_2 24 = 3 + a$.

7 zadanie na dowód

SZKIC Za każdym razem zamieniamy podstawę na tę z założeń. a) $\frac{\log_2 25}{\log_2 20} = \frac{2\log_2 5}{2+\log_2 5}$. b) $\frac{\log_3 15}{\log_3 6} = \frac{1+\log_3 5}{1+\log_3 2}$. c) Postać iloczynowa: iloczyn jest równy $\log_2 16$. d) $\frac{\log_5 40}{\log_5 6} = \frac{\log_5 8 + \log_5 5}{\log_5 2 + \log_5 3}$, a $\log_5 8 = 3a$.

8 ODP. a) o 100%; b) $T = 10$ dni; c) po 8 latach.

SZKIC a) $N(3) = 8N_0$, więc $k^3 = 8$ i $k = 2$ – populacja co godzinę się podwaja. b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{T}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, więc $\frac{30}{T} = 3$. c) $1,1^n > 2$, czyli $n > \frac{\log 2}{\log 1,1} \approx 7,27$; sprawdzenie: $1,1^7 \approx 1,95, 1,1^8 \approx 2,14$.

9 ODP. a) dowód; b) 2^{100} ma 31 cyfr, $2^{64} - 20$ cyfr.

SZKIC a) $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^{10} = 10^{30}$. b) $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 30,10$, więc $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$; $\log 2^{64} \approx 19,26$, więc $10^{19} < 2^{64} < 10^{20}$.

10 ODP. a) 1000 razy; b) 1000 razy; c) o $\frac{4}{3}$.

SZKIC a) Różnica magnitud 3, więc 10^3 . b) Różnica 2, więc $(10^{1,5})^2 = 10^3$. c) $10^{1,5d} = 100 = 10^2$, więc $1,5d = 2$.

11 ODP. a) 3^{21} ; b) 5^{11} ; c) 2^{29} ; d) 2^{31} .

SZKIC a) $3 \cdot 3^{20}$. b) $(4 + 1) \cdot 5^{10} = 5 \cdot 5^{10}$. c) $2 \cdot 2^{29} = 2^{30}$. d) $2 \cdot 4^{15} = 2 \cdot 2^{30}$.

Dodatek

12 zadanie na dowód

SZKIC $a^{\log_a x - \log_a y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \frac{x}{y}$, więc $\log_a x - \log_a y$ to wykładnik, do którego trzeba podnieść a , żeby otrzymać $\frac{x}{y}$ – czyli z definicji $\log_a \frac{x}{y}$.

13 zadanie na dowód

SZKIC $a^{m \log_a x} = (a^{\log_a x})^m = x^m$, więc $m \log_a x$ to wykładnik, do którego trzeba podnieść a , żeby otrzymać x^m – czyli $\log_a x^m$.

14 zadanie na dowód

SZKIC Niech $u = \log_a b$, czyli $a^u = b$. Logarytmujemy obie strony równości przy podstawie c : $\log_c a^u = \log_c b$, czyli $u \log_c a = \log_c b$. Dzielimy przez $\log_c a$, które nie jest zerem, bo $a \neq 1$.