

E-BOOK

WERSJA DEMO

MATEMATYKA ROZSZERZONA

- Zadania otwarte z matur majowych 2015–2026
- Uzupełnione o wybrane zadania z terminów dodatkowych
- Uporządkowane według działów i poziomu trudności
- Szczegółowe rozwiązania krok po kroku
- Wskazówki egzaminacyjne i statystyki CKE

GRATIS

5 autorskich arkuszy próbnych



TOMASZ SAWECZKO · ŁYSY UCZY MATMY

Matematyką zajmuję się od 2005 roku – zacząłem od korepetycji dla znajomych ze szkoły. Studiowałem matematykę na **Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu**. W trakcie studiów dwukrotnie byłem stypendystą MNiSW za wybitne osiągnięcia naukowe, a przez dwa lata prowadziłem zajęcia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla studentów pierwszego roku matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



DARMOWY KURS · YOUTUBE

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

[Zobacz kurs](#)

DODATKOWE MATERIAŁY

[Wszystkie materiały](#)[Autorskie arkusze próbne](#)[Krótkie filmy](#)[Dłuższe filmy](#)

Zapraszam do mojego kanału na Discordzie

[Dołącz](#)

Statystyki działów

Zestawienie obejmuje wszystkie zadania otwarte z matur majowych z lat 2015–2026, które znalazły się w tym zbiorze. Celowo pominąłem jedno zadanie otwarte z tych matur: nierówność trygonometryczną z 2016 roku (zadanie 11), bo nierówności trygonometrycznych nie ma w obecnej podstawie programowej. Poziomy wykonania pochodzą ze sprawozdań CKE. Zadania z terminów dodatkowych nie są wliczane do statystyk. Średnią punktację, poziom wykonania i częstość znajdziesz też w pasku pod tytułem każdego działu.

129

ZADAŃ OTWARTYCH

12

MATUR MAJOWYCH

34 %

ŚR. POZIOM WYKONANIA

4,2

ŚR. PUNKTÓW ZA ZADANIE

Działy w liczbach

DZIAŁ	ZADANIA	ŚR. PKT	POZIOM WYKONANIA	CZĘSTOŚĆ
1. Funkcja wykładnicza	3	2	58 %	3/4*
2. Logarytmy	2	3	57 %	2/12
3. Funkcja kwadratowa	12	5	37 %	11/12
4. Wielomiany	3	5,3	37 %	3/12
5. Funkcje wymierne	1	3	36 %	1/12
6. Dowody algebraiczne	9	3	34 %	9/12
7. Wartość bezwzględna	5	3,6	45 %	5/12
8. Ciągi liczbowe	10	4,3	43 %	10/12
9. Planimetria (zadania dowodowe)	12	3,2	21 %	12/12
10. Planimetria (zadania obliczeniowe)	7	4,1	31 %	7/12
11. Stereometria	9	4,8	27 %	9/12
12. Geometria analityczna	13	5,2	28 %	11/12
13. Trygonometria	10	4,2	32 %	10/12
14. Kombinatoryka	4	3,3	29 %	4/12
15. Rachunek prawdopodobieństwa	8	3,5	37 %	8/12
16. Pochodne	6	3	49 %	6/12
17. Zadania optymalizacyjne	12	6,8	32 %	12/12
18. Inne zadania	3	2,3	25 %	3/12

- **Zadania** – liczba zadań otwartych z matur majowych w danym dziale.
- **Śr. pkt** – średnia liczba punktów możliwych do zdobycia za zadanie z danego działu.
- **Poziom wykonania** – średnia z poziomów wykonania zadań działu.
- **Częstość** – z ilu matur majowych pochodzi co najmniej jedno zadanie otwarte tego zbioru z danego działu; komplet kresek oznacza każdą maturę.

* Zadania otwarte z funkcji wykładniczej pojawiają się dopiero od 2023 roku, dlatego ich częstość liczę tylko dla matur 2023–2026 (3 z 4, czyli 9 kresek z 12).

Działy na kolejnych maturach

Każda barwna kratka to zadanie otwarte z danego działu z matury majowej, a liczba w kratce – poziom wykonania tego zadania w procentach. Szara kratka oznacza, że w zbiorze nie ma zadania z tego działu z tej matury. Kratka podzielona na pół oznacza dwa zadania z tego samego działu w jednym arkuszu. Barwy krutek są wzorowane na skali łatwości ze sprawozdań CKE, z jedną zmianą: granicę między zadaniami trudnymi a bardzo trudnymi przesunąłem z 20 % na 25 %. Zielone kratki to zadania łatwe i umiarkowanie trudne, pomarańczowe – trudne, a czerwone – bardzo trudne.

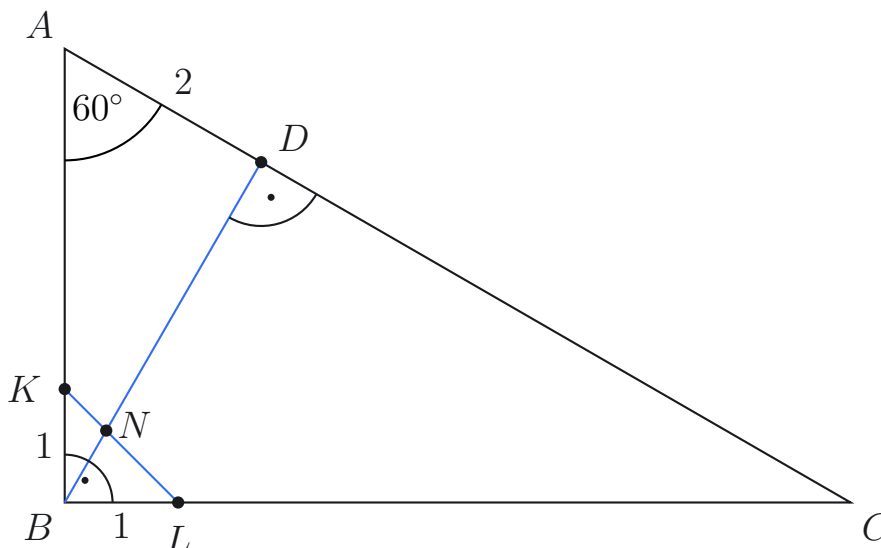
	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
1. Funkcja wykładnicza									48	48	77	
2. Logarytmy							52			62		
3. Funkcja kwadratowa	63 23	33	28	37		44	35	37	45	41	41	18
4. Wielomiany	19				44			47				
5. Funkcje wymierne							36					
6. Dowody algebraiczne	22	20	26		40	25		25	67		35	44
7. Wartość bezwzględna						28		44	52		52	49
8. Ciągi liczbowe		32	60	51	33	34		32	39	42	46	56
9. Planimetria (zadania dowodowe)	41	16	11	22	25	19	14	10	36	15	29	19
10. Planimetria (zadania obliczeniowe)	37				31		20		42	18	17	50
11. Stereometria	24	20	12	48		22		21	49		16	30
12. Geometria analityczna		28 15	40	7	30	33	53 19	24	42	18	23	33
13. Trygonometria			47	21	31	44	17	32	45	29	22	29
14. Kombinatoryka		41			36	20				18		
15. Rachunek prawdopodobieństwa	58		23	23			30		67	47	14	37
16. Pochodne	52		45	42	47				60	50		
17. Zadania optymalizacyjne	35	25	24	14	34	31	28	28	63	32	35	34
18. Inne zadania				4						31		40

■ łatwe (70–89 %)
 ■ umiarkowanie trudne (50–69 %)
 ■ trudne (25–49 %)
 ■ bardzo trudne (poniżej 25 %)

Zadanie 9.2 MAJ 2023 · ZADANIE NR 5

3 pkt

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle CAB| = 60^\circ$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N , a ponadto $|AD| = 2$.



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 9.3** MAJ 2025 · ZADANIE NR 7

4 pkt

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem ramienia AD , a punkt F jest środkiem ramienia BC trapezu. Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$.

Wykaż, że

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}.$$

TRUDNOŚĆ 3,5/5



Rozwiązanie zadania 3.12 (MAJ 2026 · ZADANIE NR 10)

• Etap I: ustalenie warunków zadania

Z założenia $m \neq 0$, więc współczynnik przy x^2 jest dodatni: $m^2 > 0$. Funkcja f jest zatem funkcją kwadratową, a jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych w górę.

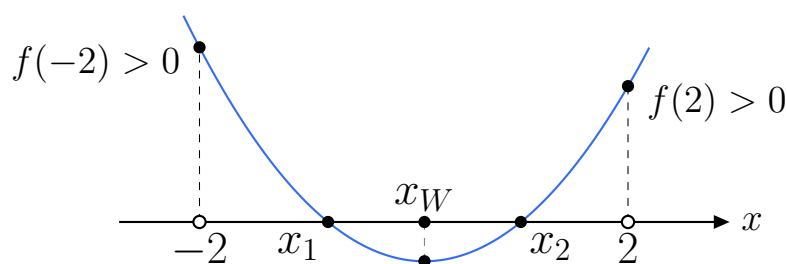
Uwaga!

Tę obserwację warto zapisać wprost, bo od kierunku ramion paraboli zależą warunki na znak funkcji na końcach przedziału, czyli warunki 3) i 4) poniżej. CKE w sprawozdaniu z egzaminu uznała jej pominięcie za lukę nawet w rozwiązaniu, które poza tym było w pełni poprawne.

- Aby parabola o ramionach skierowanych w górę przecinała oś Ox w dwóch różnych punktach należących do przedziału $(-2, 2)$, muszą być spełnione jednocześnie cztery warunki:

- 1) $\Delta(m) > 0$ (istnieją dwa różne miejsca zerowe),
- 2) $-2 < x_W < 2$ (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do przedziału $(-2, 2)$),
- 3) $f(-2) > 0$ (funkcja jest dodatnia na lewym końcu przedziału; razem z warunkiem 2) oznacza to, że lewy koniec leży na lewo od obu miejsc zerowych),
- 4) $f(2) > 0$ (funkcja jest dodatnia na prawym końcu przedziału; razem z warunkiem 2) oznacza to, że prawy koniec leży na prawo od obu miejsc zerowych).

Poniższy szkic pokazuje wszystkie cztery warunki naraz:

**Uwaga**

To zadanie jest tego samego typu co zadanie z czerwca 2017 z tego rozdziału – tam oba pierwiastki miały być mniejsze od 3, więc wystarczyło zbadać znak funkcji na jednym końcu przedziału. Tutaj przedział jest ograniczony z obu stron, dlatego badamy znak funkcji na obu jego końcach. Warunki 3) i 4) same nie wystarczą: funkcja f może przyjmować wartości dodatnie na obu końcach przedziału, a mimo

Rozwiązanie zadania 4.3 (MAJ 2015 · ZADANIE NR 15)

• **Etap I: wykorzystanie informacji o sumie współczynników**

Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa wartości tego wielomianu dla argumentu $x = 1$.

$$W(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 + a + b + c.$$

Z treści zadania wiemy, że suma ta wynosi 0:

$$1 + a + b + c = 0 \implies W(1) = 0.$$

Oznacza to, że liczba 1 jest jednym z pierwiastków wielomianu W .

• **Etap II: wyznaczenie możliwych pierwiastków wielomianu**

Niech x_1, x_2, x_3 będą pierwiastkami wielomianu. Wiemy, że tworzą one ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$. Skoro jednym z pierwiastków jest liczba 1, rozważamy trzy możliwe przypadki, w zależności od tego, którym wyrazem ciągu jest ta liczba.

1) **Liczba 1 jest pierwszym wyrazem ciągu ($x_1 = 1$):**

Pierwiastki to: $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 7$.

2) **Liczba 1 jest drugim wyrazem ciągu ($x_2 = 1$):**

Pierwiastki to: $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 4$.

3) **Liczba 1 jest trzecim wyrazem ciągu ($x_3 = 1$):**

Pierwiastki to: $x_1 = -5, x_2 = -2, x_3 = 1$.

x_1	x_2	x_3
1	4	7
-2	1	4
-5	-2	1

• **Etap III: wyznaczenie współczynników a, b, c**

Dla każdego przypadku zapisujemy wielomian w **postaci iloczynowej** (analogicznie do postaci iloczynowej funkcji kwadratowej):

$$W(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

wykonujemy mnożenie i odczytujemy współczynniki.

• **Przypadek 1: Pierwiastki $\{1, 4, 7\}$**

$$W(x) = (x - 1)(x - 4)(x - 7)$$

- **Sposób II (geometryczny)**

Równanie $x^2 + y^2 = 2$ opisuje na płaszczyźnie okrąg o środku w początku układu współrzędnych $S = (0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Warunek $x, y > 0$ oznacza, że rozważamy łuk tego okręgu leżący w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

- Nierówność $x + y \leq 2$ możemy zapisać w postaci:

$$x + y - 2 \leq 0.$$

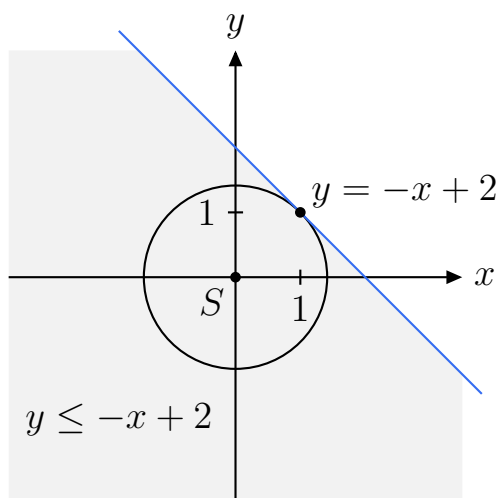
Nierówność ta opisuje półpłaszczyznę, której krawędzią jest prosta k o równaniu ogólnym $x + y - 2 = 0$. Sprawdźmy wzajemne położenie okręgu i tej prostej.

- Obliczamy odległość d środka okręgu $S = (0, 0)$ od prostej k , korzystając ze **wzoru na odległość punktu od prostej**:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

- Zauważmy, że odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi tego okręgu ($d = r = \sqrt{2}$). Oznacza to, że prosta $x + y - 2 = 0$ jest styczna do okręgu.



Ponieważ środek okręgu $(0, 0)$ spełnia nierówność $0 + 0 \leq 2$, to cały okrąg leży w półpłaszczyźnie wyznaczonej przez tę nierówność (mając z jej brzegiem tylko jeden punkt

Planimetria (zadania dowodowe)

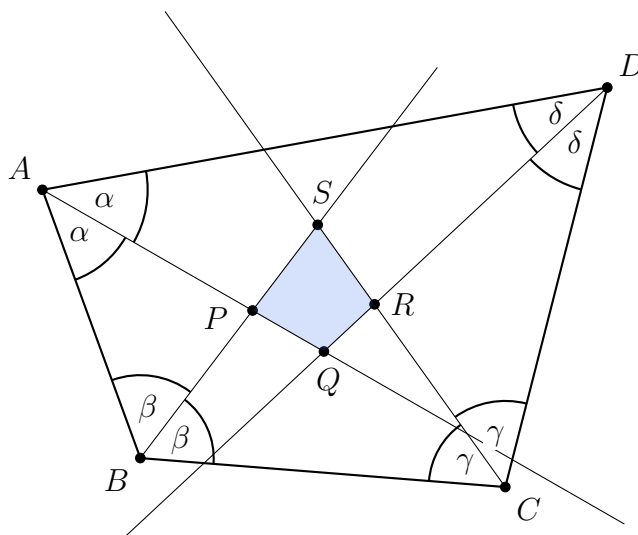
Rozwiązanie zadania 9.1 (MAJ 2015 · ZADANIE NR 9)

Uwaga!

Informacja o tym, że czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, jest zbędna (i może być myląca). Poniższy dowód jest poprawny dla dowolnego czworokąta wypukłego.

- Etap I: wprowadzenie oznaczeń i wykorzystanie sumy kątów czworokąta**

Przyjmijmy oznaczenia kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ tak, jak na rysunku pomocniczym:



Niech:

$$|\angle DAB| = 2\alpha, \quad |\angle ABC| = 2\beta, \quad |\angle BCD| = 2\gamma, \quad |\angle CDA| = 2\delta.$$

Ponieważ odcinki AP, BP, CR, DR zawierają się w dwusiecznych tych kątów, dzielą je one na połowy (np. $|\angle PAB| = \alpha, |\angle PBA| = \beta$).

- Suma kątów wewnętrznych w dowolnym czworokącie wynosi 360° . Zatem:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ.$$

Dzieląc to równanie obustronnie przez 2, otrzymujemy:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

- Etap II: wyznaczenie miar kątów APB i CRD**

Rozważmy trójkąt APB . Suma kątów w trójkącie wynosi 180° , więc:

$$|\angle APB| = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

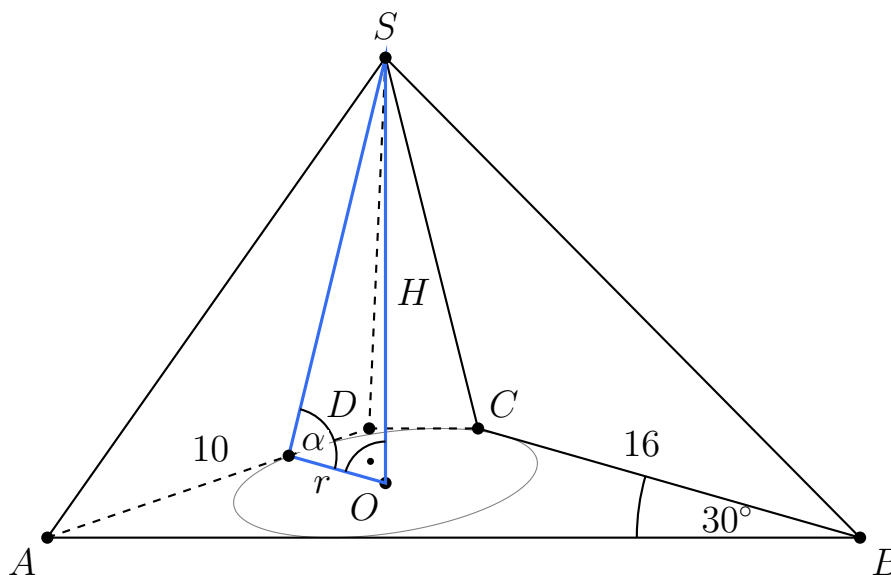
Rozwiązanie zadania 11.5 (CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 14)

• Etap I: analiza własności ostrosłupa

Z treści zadania wiemy, że wszystkie ściany boczne ostrosłupa tworzą z płaszczyzną podstawy ten sam kąt α . Jest to kluczowa informacja, która implikuje dwie rzeczy:

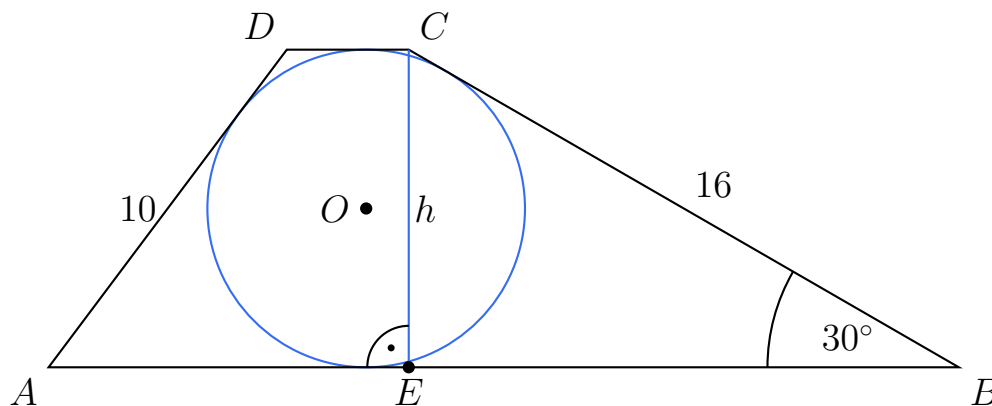
- 1) W podstawę ostrosłupa (trapez $ABCD$) można wpisać okrąg.
- 2) Spodek wysokości ostrosłupa O jest środkiem tego okręgu wpisanego.

Wysokość ostrosłupa oznaczmy przez H , a promień okręgu wpisanego w podstawę przez r . Kąt α znajduje się w trójkącie prostokątnym utworzonym przez wysokość H , promień r oraz wysokość ściany bocznej (patrz rysunek).



• Etap II: obliczenie promienia okręgu wpisanego i pola podstawy

Skupmy się teraz na podstawie ostrosłupa. Niech h oznacza wysokość trapezu $ABCD$.

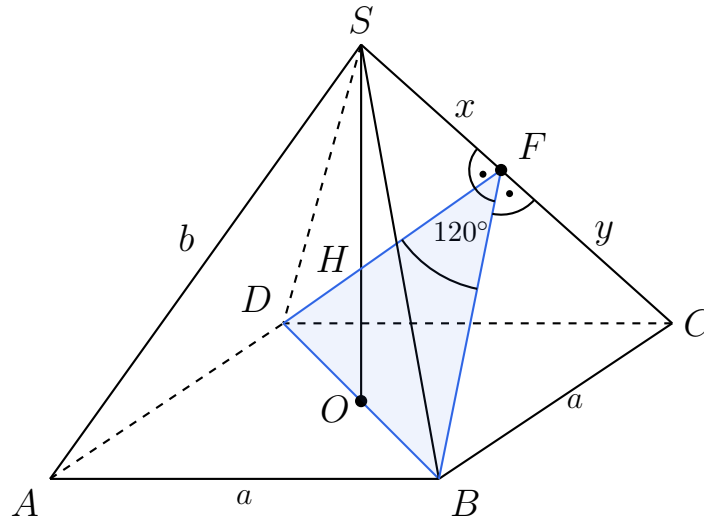


W trapezie opisanym na okręgu wysokość jest równa średnicy tego okręgu, zatem:

$$h = 2r.$$

- 6) $y = |FC|$ – długość dolnego odcinka krawędzi bocznej (od punktu F do wierzchołka C).

Zauważmy, że $b = x + y$.



• **Etap II: wyznaczenie zależności między a i y**

Rozważmy trójkąt BFD . Jest on równoramienny ($|BF| = |DF|$). Podstawa BD jest przekątną kwadratu o boku a , zatem:

$$d = a\sqrt{2}$$

$$|BD| = a\sqrt{2}.$$

- Punkt O (spodek wysokości ostrosłupa) jest środkiem odcinka BD . W trójkącie prostokątnym BFO (kąt prosty przy wierzchołku O) kąt $\angle BFO$ jest połową kąta 120° , czyli ma miarę 60° .

$$\sin 60^\circ = \frac{|BO|}{|BF|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{|BF|}.$$

Podstawiając $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2|BF|}$$

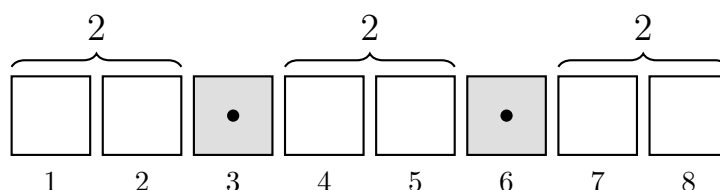
$$|BF|\sqrt{3} = a\sqrt{2}$$

$$|BF| = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

- Teraz rozważmy ścianę boczną BCS . Jest to trójkąt, w którym odcinek BF jest wysokością opuszczoną na bok CS (zgodnie z konstrukcją kąta dwuściennego). Zatem trójkąt

- **Etap III: wyznaczenie pozycji liczb 3 i 6**

Iloczyn jest podzielny przez 3 dokładnie wtedy, gdy któryś z czynników jest podzielny przez 3. Więc każda trójka kolejnych pozycji musi zawierać liczbę 3 lub 6. Dwie zajęte pozycje dzielą pozostałe na trzy luki, z których żadna nie może mieć więcej niż dwie pozycje; wolnych pozycji jest $8 - 2 = 6$, a $6 = 2 + 2 + 2$, więc każda luka ma równo dwie. Liczby 3 i 6 muszą zatem stanąć na pozycjach **trzeciej i szóstej**. Odwrotnie, każde takie ustawienie spełnia warunek zadania: trójka kolejnych pozycji, która omija pozycje trzecią i szóstą, musiałaby zmieścić się w jednej luce, a każda luka ma tylko dwie pozycje. Na rysunku zaznaczono te pozycje szarym tłem, a klamry obejmują trzy luki:



- **Etap IV: obliczenie prawdopodobieństwa**

Ustawienie sprzyjające budujemy w dwóch niezależnych krokach:

- 1) liczby 3 i 6 ustawiamy na pozycjach trzeciej i szóstej – na $2!$ sposobów,
- 2) pozostałe sześć liczb ustawiamy na sześciu wolnych pozycjach – na $6!$ sposobów.

Zatem

$$|A| = 2! \cdot 6!.$$

- Korzystamy z **klasycznej definicji prawdopodobieństwa**:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Silni nie obliczamy – w ułamku i tak się skrócą. Rozkładamy $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6!$:

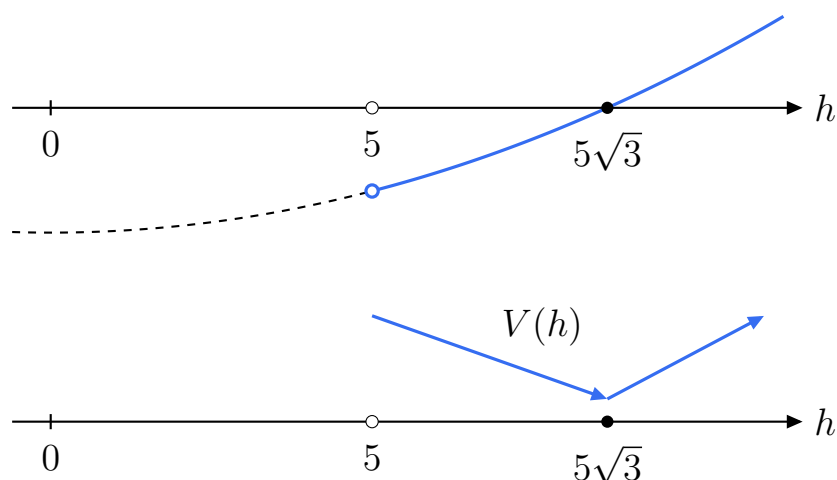
$$P(A) = \frac{2! \cdot 6!}{8!} = \frac{2 \cdot 6!}{8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}.$$

- **Sposób II (model na pozycjach)**

- **Etap I: analiza zadania**

Skoro o zajściu zdarzenia A decyduje wyłącznie położenie liczb 3 i 6 (Sposób I, Etap I), to zamiast całych ciągów wystarczy losować samą parę pozycji, na których te liczby staną.

- Poniższy rysunek przedstawia interpretację powyższych rachunków. U góry szkic wykresu funkcji $h^2 - 75$, od której zależy znak pochodnej $V'(h)$, poniżej zachowanie funkcji $V(h)$.



- Oznacza to, że w punkcie $h = 5\sqrt{3}$ funkcja $V(h)$ osiąga minimum lokalne, które jest jednocześnie **najmniejszą wartością** w podanym przedziale, ponieważ jest to jedyne ekstremum funkcji w dziedzinie.

Zatem wysokość stożka, dla której objętość jest najmniejsza, wynosi $h = 5\sqrt{3}$.

Uwaga!

Powyższe uzasadnienie jest konieczne! Samo wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej nie dowodzi tego, że w tym miejscu zerowym funkcja przyjmuje wartość największą lub najmniejszą. Jeśli w rozwiązaniu zadania będzie brakować tego uzasadnienia, to za tę część można otrzymać **maksymalnie 2 punkty!**

• Etap III: obliczamy najmniejszą objętość

Na koniec nie możemy zapomnieć, że proszono nas również o wyznaczenie najmniejszej objętości.

$$V_{\min} = V(5\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25 \cdot (5\sqrt{3})^3}{(5\sqrt{3})^2 - 25}.$$

- Obliczamy $(5\sqrt{3})^2$ i $(5\sqrt{3})^3$:

$$(5\sqrt{3})^2 = 25 \cdot 3 = 75$$

$$(5\sqrt{3})^3 = (5\sqrt{3})^2 \cdot 5\sqrt{3} = 75 \cdot 5\sqrt{3} = 375\sqrt{3}.$$

- Podstawiamy do wzoru:

$$V_{\min} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25 \cdot 375\sqrt{3}}{75 - 25}$$