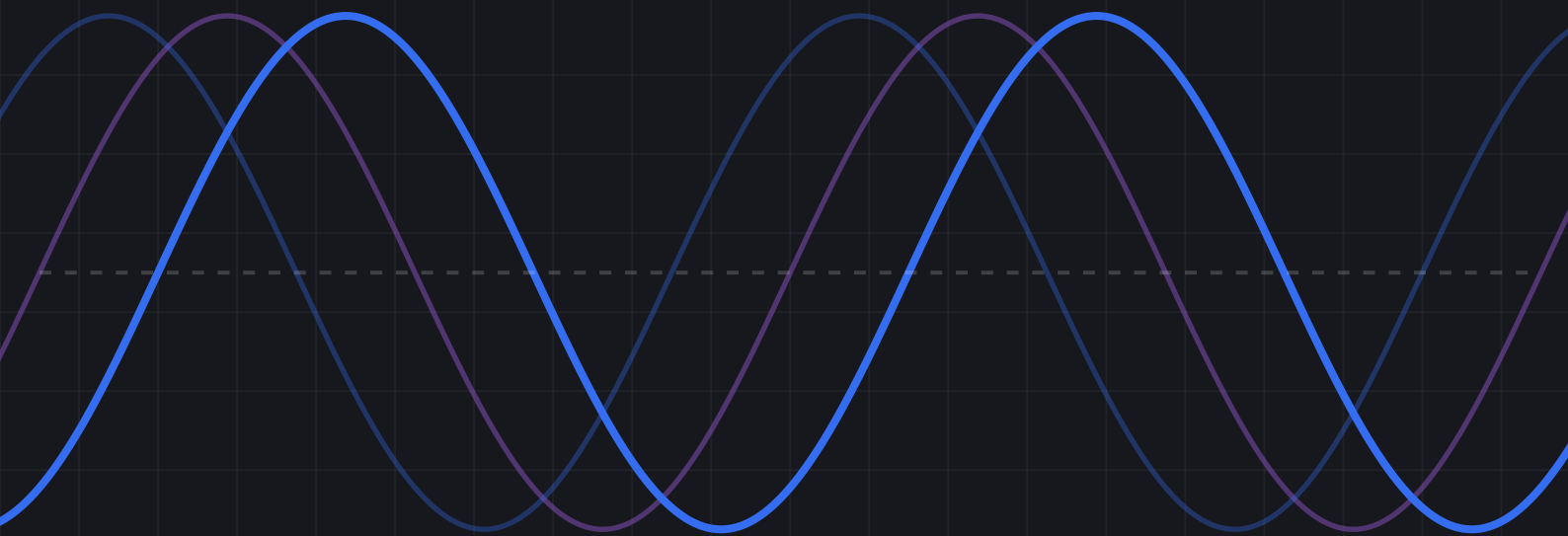




FUNKCJA KWADRATOWA

Wszystkie zadania z matur 2015–2026 · poziom rozszerzony

Od najłatwiejszego do najtrudniejszego · z kluczem

ZAWARTOŚĆ ZBIORU

25 ZADAŃ

R



O AUTORZE



Dzień dobry!

Nazywam się **Tomasz Saweczko**, w internecie jestem znany jako „**Łysy uczy matmy**”. Uczę matematyki od ponad 20 lat, a studiowałem ją na Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu.



WSZYSTKO DO MATURY ROZSZERZONEJ

Kurs maturalny wraz z materiałami pomocniczymi, autorskie arkusze próbne, zbiory zadań i inne.

lisyuczymatmy.pl/rozszerzenie



DARMOWY KURS DO MATURY ROZSZERZONEJ

Filmy, materiały do pobrania i zadania do samodzielnej pracy – całość prowadzę na YouTube, a komplet zebrany jest tutaj:

lisyuczymatmy.pl/yt-matura-rozszerzona-kurs



ARKUSZE PRÓBNE

Własne arkusze do przećwiczenia całej matury, z rozwiązaniami:

lisyuczymatmy.pl/arkusze

 YouTube

 TikTok

 Instagram

 lisyuczymatmy.pl

Powodzenia na maturze – i do zobaczenia na kanale!

O tym zestawie

W tym pliku są **wszystkie zadania z funkcji kwadratowej**, jakie pojawiły się na maturach rozszerzonych w latach 2015–2026 – razem **25**, ze wszystkich terminów. Treści pochodzą wprost z arkuszy CKE i nie są zmieniane; przy każdym zadaniu stoi jego sesja i numer w oryginalnym arkuszu.

Zadania idą **od najłatwiejszego do najtrudniejszego**. Na końcu jest **klucz**: wynik, wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania, czyli sam pomysł bez rachunków.

Skąd bierze się poziom trudności

Trudność jest liczbą wyprowadzoną z **poziomu wykonania** – średniego wyniku wszystkich zdających za dane zadanie, podanego w procentach maksymalnej liczby punktów:

$$\text{trudność} = (100 - \text{poziom wykonania}) : 20$$

Dla **11 zadań** poziom wykonania pochodzi ze **sprawozdań CKE** – publikuje je ona tylko dla terminu głównego. Dla pozostałych **14** sprawozdań nie ma (terminy dodatkowe i rok 2026), więc poziomy **zostały oszacowane** przez porównanie z zadaniami tego samego typu i za tyle samo punktów, dla których dane CKE istnieją.

Jak czytać oznaczenie trudności

Pod każdym zadaniem stoi jego trudność w skali **od 0 do 5** – pięć kółek zamalowywanych co pół:

Niski poziom trudności ● ● ● ● ● 1/5

Średni poziom trudności ● ● ● ● ● 3/5

Wysoki poziom trudności ● ● ● ● ● 5/5

Plakietka przy numerze zadania

Po lewej stronie nagłówka ramki stoi **źródło** – sesja i numer zadania w arkuszu CKE, po prawej **punktacja**. Między nimi może stać plakietka:

ZWZM **zadanie wycofane z matur** – w tym zestawie jedno. Wraz z Formułą 2023 zniknęły zadania **zamknięte wielokrotnego wyboru** (odpowiedzi A–D) i **kodowane** (wynik wpisywany cyframi w kratki). Rozwiązanie ich nadal ma sens: sprawdzają tę samą wiedzę, tylko w takiej formie już nie występują.

Zadania

Zadanie 1 MAJ 2015 · ZADANIE NR 7

2 PKT

Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f .

Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

TRUDNOŚĆ 2/5



Zadanie 2 CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 6

ZWZM

2 PKT

Funkcja kwadratowa

$$f(x) = -x^2 + bx + c$$

ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -1$ i $x_2 = 12$. Oblicz największą wartość tej funkcji.

Zakoduj kolejno, od lewej do prawej, cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

TRUDNOŚĆ 2/5



Zadanie 3 MAJ 2023 · ZADANIE NR 11

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 > -28.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5



Zadanie 4 CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 11

4 PKT

Dane jest równanie kwadratowe

$$x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$$

z niewiadomą x . Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których różne rozwiązania x_1 i x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek

$$2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2.$$

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 5** MAJ 2024 · ZADANIE NR 12

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (3m + 1)x + 2m^2 + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 6** MAJ 2025 · ZADANIE NR 11

6 PKT

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = (2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3/5



Zadanie 7 MAJ 2018 · ZADANIE NR 12

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 + (m + 1)x - m^2 + 1 = 0$$

ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2.$$

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 8** MAJ 2022 · ZADANIE NR 12

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (m + 1)x + m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunki: $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ oraz

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}.$$

TRUDNOŚĆ 3/5

**Zadanie 9** MAJ 2021 · ZADANIE NR 11

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których trójmian kwadratowy

$$4x^2 - 2(m + 1)x + m$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2 spełniające warunki: $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ oraz

$$x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 10** MAJ 2016 · ZADANIE NR 12

6 PKT

Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 + 2(m + 1)x + 6m + 1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m , dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 , x_2 tego samego znaku spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 3$.

TRUDNOŚĆ 3,5/5



Zadanie 11 CZERWIEC 2023 · ZADANIE NR 10

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$mx^2 - (m + 1)x - 2m + 3 = 0$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 12** CZERWIEC 2025 · ZADANIE NR 5

4 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 3,5/5

**Zadanie 13** MAJ 2017 · ZADANIE NR 12

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$4x^2 - 6mx + (2m + 3)(m - 3) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 , przy czym $x_1 < x_2$, spełniające warunek

$$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0.$$

UWAGA!

Założenie $x_1 < x_2$ **niczego tu nie wnosi**. Warunek z zadania to po wymnożeniu $16(x_1 - x_2)^2 - 1 < 0$, a więc $|x_1 - x_2| < \frac{1}{4}$ — jest **symetryczny** względem obu pierwiastków. Ustawianie ich w kolejności sugeruje, że kolejność ma znaczenie, a nie ma.

TRUDNOŚĆ 3,5/5



Zadanie 14 MAJ 2015 · ZADANIE NR 13

5 PKT

Dany jest trójmian kwadratowy

$$f(x) = (m + 1)x^2 + 2(m - 2)x - m + 4.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek

$$x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4.$$

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 15** CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 13

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty, 3)$.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 16** CZERWIEC 2019 · ZADANIE NR 12

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania x_1, x_2 spełniające nierówność

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}.$$

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 17** LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 11

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność

$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x > 2mx - 2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

TRUDNOŚĆ 4/5



Zadanie 18 CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 12

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(3 - m) \cdot x^2 + (m + 1) \cdot x - (m + 1)^2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7.$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 19** CZERWIEC 2015 · ZADANIE NR 15

6 PKT

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{m^2 + m - 6}{m - 5} x^2 - (m - 2)x + m - 5$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

Wyznacz całkowite wartości parametru m , dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 20** CZERWIEC 2018 · ZADANIE NR 14

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - 3mx + (m + 1)(2m - 1) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz

$$0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}.$$

TRUDNOŚĆ 4/5



Zadanie 21 CZERWIEC 2021 · ZADANIE NR 12

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(x - 3)(x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m) = 0$$

ma dokładnie dwa rozwiązania.

TRUDNOŚĆ 4/5

**Zadanie 22** CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 13

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(x - 4)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6] = 0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 oraz x_3 , spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51.$$

TRUDNOŚĆ 4,5/5

**Zadanie 23** CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 12

4 PKT

Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$k^2 x^2 + (k - 1)x + 1 = 0,$$

gdzie $k \neq 0$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2^m$.

UWAGA!

Zapis $f(x) = 2^m$ jest **nieprecyzyjny i myląca jest tu litera x** : przez x oznaczono w treści pierwiastki równania, a liczba m zależy **od parametru k** . Funkcja powinna być zapisana jako $f(k) = 2^{m(k)}$ — i tak trzeba ją czytać, żeby pytanie o zbiór wartości miało sens.

TRUDNOŚĆ 4,5/5



Zadanie 24

MAJ 2026 · ZADANIE NR 10

5 PKT

Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m , gdzie $m \neq 0$, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$$

ma dwa różne miejsca zerowe x_1 oraz x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$. Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4,5/5

**Zadanie 25**

CZERWIEC 2026 · ZADANIE NR 11

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 + mx + m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 spełniające warunek

$$x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$$

Zapisz obliczenia.

TRUDNOŚĆ 4,5/5



Odpowiedzi, wskazówki i szkice rozwiązań

Numer to numer zadania w tym zestawie. Do każdego zadania: wynik końcowy (przy dowodach pominięty), wskazówka naprowadzająca na pomysł i szkic rozwiązania – sam klucz, bez rachunków.

1 ODP. $\frac{7}{39}$.

WSK. Skorzystaj z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

SZKIC $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$, więc $f(6) = 21a$, $f(12) = 117a$ i iloraz to $\frac{21}{117} = \frac{7}{39}$.

2 ODP. 225

WSK. Skorzystaj z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

SZKIC Wierzchołek w środku między zerami: $p = 5,5$; $f(x) = -(x + 1)(x - 12)$, więc $f(5,5) = 6,5^2 = 42,25$.

3 ODP. $m \in (\frac{11}{5}, \frac{9}{4})$.

WSK. Wyznacz warunek na istnienie dwóch różnych rozwiązań rzeczywistych równania ($\Delta(m) > 0$). Następnie przekształć wyrażenie $x_1^3 + x_2^3$, korzystając ze wzoru na sumę sześcianów, tak aby móc zastosować wzory Viète'a.

SZKIC $\Delta > 0 \iff \frac{5m-11}{m-2} > 0$. Z $x_1 + x_2 = -4$:
 $x_1^3 + x_2^3 = -64 + 12x_1x_2 > -28 \iff x_1x_2 > 3 \iff \frac{4m-9}{m-2} < 0$, czyli $2 < m < \frac{9}{4}$; razem $\frac{11}{5} < m < \frac{9}{4}$.

4 ODP. $m_1 = -\frac{9}{5}$ oraz $m_2 = \frac{1}{4}$.

WSK. Żeby przekształcić warunek zadania skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

SZKIC $\Delta = (m-8)^2 > 0 \iff m \neq 8$. Warunek to $2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2$, czyli $2(3m+2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2$: $20m^2 + 31m - 9 = 0$, $m = \frac{1}{4}$ lub $m = -\frac{9}{5}$.

5 ODP. $m \in (-\infty, -3)$.

WSK. Zaczynij od warunku na dwa różne rozwiązania, tzn. $\Delta(m) > 0$. Nierówność z warunku przekształć następująco:

$$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - 9x_1x_2 \leq 3m - 7$$

i zauważ, że:

$$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_2)^3.$$

SZKIC $\Delta = (m+3)(m-1) > 0$. Lewa strona warunku to $(x_1 + x_2)^3 - 9x_1x_2$, więc $(3m+1)^3 - 9(2m^2 + m + 1) \leq 3m - 7$, co związa się do $(3m+1)^2(3m-1) \leq 0$, czyli $m \leq \frac{1}{3}$. Razem $m < -3$.

6 ODP. $m \in (-8, -3) \cup (1, \frac{3}{2}]$.

WSK. Zadanie wymaga spełnienia trzech warunków:

(1) $\Delta > 0$ dla dwóch różnych miejsc zerowych,

(2) $x_1 \cdot x_2 > 0$ dla miejsc zerowych tego samego znaku,

(3) $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$.

Do przekształcenia tego ostatniego warunku skorzystaj ze wzoru:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

oraz ze **wzorów Viète'a**.

SZKIC $\Delta = 20(m+3)(m-1) > 0$, $x_1x_2 = \frac{m+8}{2-m} > 0 \iff -8 < m < 2$, a $(x_1 - x_2)^2 = \frac{\Delta}{(2-m)^2} \leq 180$ daje $8m^2 - 38m + 39 \geq 0$, czyli $m \leq \frac{3}{2}$ lub $m \geq \frac{13}{4}$. Część wspólna: $(-8, -3) \cup (1, \frac{3}{2}]$.

7 ODP. $m \in (-\infty, -3) \cup (\frac{3}{5}, \frac{3}{4})$.

WSK. Wyrażenie $x_1^3 + x_2^3$ rozpisz korzystając ze **wzoru na sumę sześcianów** tak, aby móc skorzystać ze **wzorów Viète'a**:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]. \end{aligned}$$

SZKIC $\Delta = (5m-3)(m+1) > 0$. Z $s = -(m+1)$, $p = 1-m^2$: $s^3 - 3ps + 7p > 0$ sprowadza się do $(m+1)(m+3)(4m-3) < 0$, czyli $m < -3$ lub $-1 < m < \frac{3}{4}$; po przecięciu z $\Delta > 0$: $m < -3$ lub $\frac{3}{5} < m < \frac{3}{4}$.

8 ODP. $m \in \{-1, \frac{1}{2}\}$.

WSK. Wyrażenia z warunku z zadania sprowadź do wspólnego mianownika. Następnie wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$ możesz przekształcić korzystając ze **wzoru skróconego mnożenia**:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

To umożliwi skorzystanie ze **wzorów Viète'a**.

SZKIC $x^2 - (m+1)x + m = (x-1)(x-m)$, więc $x_1 = 1$, $x_2 = m$ z $m \neq 0, 1$. Warunek $1 + \frac{1}{m} + 2 = 1 + \frac{1}{m^2}$ daje $2m^2 + m - 1 = 0$: $m = \frac{1}{2}$ lub $m = -1$.

9 ODP. $m \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, 4)$.

WSK. Aby żaden z pierwiastków nie był równy zero, dane wyrażenie kwadratowe nie może zerować się dla $x = 0$. W tym zadaniu $\Delta(m)$ będzie wyrażeniem, które można łatwo spierwiastkować, więc będzie można bezpośrednio wyliczyć miejsca zerowe.

SZKIC $\Delta = 4(m-1)^2$, więc pierwiastki to $\frac{m}{2}$ i $\frac{1}{2}$ ($m \neq 0, 1$). Warunek $x_1 + x_2 \leq \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ to $\frac{(m+1)(m-4)}{m} \leq 0$: $m \leq -1$ lub $0 < m \leq 4$.

10 ODP. $m \in (-\frac{1}{6}, 0) \cup (4, \frac{9}{2})$.

WSK. Nierówność z warunku zadania możesz podnieść obustronnie do kwadratu (bo obie strony są nieujemne). W ten sposób opuścisz moduł, bo $|a|^2 = a^2$.

SZKIC $\Delta = 4m(m-4) > 0$, $x_1x_2 = 6m+1 > 0$, a $(x_1-x_2)^2 = \Delta < 9$ daje $-\frac{1}{2} < m < \frac{9}{2}$. Część wspólna: $(-\frac{1}{6}, 0) \cup (4, \frac{9}{2})$.

11 ODP. $m \in (-4 - 2\sqrt{6}, 0) \cup (0, \frac{1}{9})$.

WSK. Aby równanie miało dwa różne rozwiązania rzeczywiste, współczynnik przy x^2 musi być różny od zera, a **wyróżnik trójmianu kwadratowego** dodatni:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Warunek $x_1 \neq 0$ oraz $x_2 \neq 0$ oznacza, że 0 nie jest rozwiązaniem wyjściowego równania. W celu rozwiązania podanej nierówności sprowadź ułamki do wspólnego mianownika i zastosuj **wzór skróconego mnożenia** w liczniku:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Następnie skorzystaj ze **wzorów Viète'a**:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

SZKIC $m \neq 0$, $\Delta = (9m-1)(m-1) > 0$,

$x \neq 0 \iff m \neq \frac{3}{2}$. Nierówność $\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2} < 1$ to $(m+1)^2 - 2m(3-2m) < (3-2m)^2$, czyli $m^2 + 8m - 8 < 0$. Część wspólna: $(-4-2\sqrt{6}, 0) \cup (0, \frac{1}{9})$.

12 ODP. $m = 2$

WSK. Rozpisz wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$, korzystając ze **wzoru skróconego mnożenia** w następujący sposób:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Następnie skorzystaj ze **wzorów Viète'a** (nie zapomnij o warunku na Δ).

SZKIC $\Delta = 4(m-1)^2 > 0 \iff m \neq 1$. Z $s = -2m$, $p = 2m-1$ warunek to $m(4m^2 - 4m + 2) = 3m(2m-1) + 2$, czyli $4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = (m-2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$; drugi czynnik nie ma pierwiastków.

13 ODP. $m \in (-\frac{13}{2}, -6) \cup (-6, -\frac{11}{2})$.

WSK. Zapisz warunek z zadania w następujący sposób:

$$[4(x_1 - x_2) - 1][4(x_1 - x_2) + 1] < 0.$$

Następnie zauważ, że do jego przekształcenia możesz wykorzystać **wzór na różnicę kwadratów**. Informacja na temat nierówności między pierwiastkami jest zbędna i myląca. Mogłaby być wykorzystana gdy liczylibyśmy bezpośrednio pierwiastki (co i tak prowadziłoby do wielu komplikacji).

SZKIC $\Delta = 4(m+6)^2 > 0 \iff m \neq -6$. Warunek to $16(x_1 - x_2)^2 < 1$, a $(x_1 - x_2)^2 = \frac{\Delta}{16} = \frac{(m+6)^2}{4}$; stąd $|m+6| < \frac{1}{2}$.

14 ODP. $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$.

WSK. Zwróć uwagę, że współczynnik przy x^2 musi być niezerowy. Warunek z zadania rozpisz korzystając ze **wzoru na różnicę kwa-**

dratów. Uważaj, żeby nie skrócić obu stron przez wyrażenie, które może być równe zero.

SZKIC $x_1^4 - x_2^4 = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)$, więc warunek to $(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$. Przypadek $x_1 = -x_2$ daje $m = 2$, ale wtedy $\Delta = 4m(2m-7) < 0$. Zostaje $x_1^2 + x_2^2 = 1$, czyli z wzorów Viète'a $5m^2 - 24m + 7 = 0$; z dwóch pierwiastków tylko $\frac{12+\sqrt{109}}{5}$ spełnia $\Delta > 0$.

15 ODP. $m \in (-\infty, -2)$.

WSK. Rozwiąż problem geometrycznie, zastanów się jak powinna być położona parabola (np. jej wierzchołek), żeby oba miejsca zerowe były mniejsze od 3. Zwróć też uwagę jaka powinna być wartość tej funkcji dla $x = 3$.

SZKIC Parabola w górę: $\Delta = m^2 - 4 > 0$, wierzchołek $\frac{3m}{2} < 3$ i $f(3) = 2m^2 - 9m + 10 > 0$ (czyli $m < 2$ lub $m > \frac{5}{2}$). Razem $m < -2$.

16 ODP. $m \in (2, 3]$.

WSK. Przekształć wyrażenie z warunku w zadaniu za pomocą **wzoru skróconego mnożenia**:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

SZKIC $\Delta = 36$, więc pierwiastki są jawne: $x_1 = \frac{m+1}{2}$, $x_2 = \frac{m-2}{2}$ – dodatnie dla $m > 2$. Nierówność $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$ to $m^2 - m - 6 \leq 0$, czyli $-2 \leq m \leq 3$.

17 ODP. $m \in (-\infty, -11) \cup [1, +\infty)$.

WSK. Zwróć uwagę, że musisz rozpatrzyć osobny przypadek, gdy wyrażenie przy x^2 jest zerowe. Wówczas jest to nierówność liniowa.

SZKIC Po uporządkowaniu $(m^2 + 4m - 5)x^2 + 2(1 - m)x + 2 > 0$. Gdy $m = 1$: $2 > 0$ – dobrze; gdy $m = -5$: nierówność liniowa –

odpada. Inaczej trzeba $a > 0$ i $\Delta < 0$, czyli $(m+5)(m-1) > 0$ i $(m+11)(m-1) > 0$: $m < -11$ lub $m > 1$.

18 ODP. $m = 1$ lub $m = \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$.

WSK. Zwróć uwagę, że aby powyższe równanie było kwadratowe, to współczynnik przy x^2 musi być różny od zera, więc $m \neq 3$. Aby to równanie miało dwa różne rozwiązania rzeczywiste: $\Delta(m) > 0$. Wykorzystaj wzór (wynikający ze **wzorów skróconego mnożenia**):

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

aby następnie móc skorzystać ze **wzorów Viète'a**.

SKZIC $m \neq 3$, $\Delta = (m+1)^2(13-4m) > 0$. Warunek $s^2 - 3p = 7$ z $s = \frac{m+1}{m-3}$, $p = \frac{(m+1)^2}{m-3}$ daje $(m+1)^2(10-3m) = 7(m-3)^2$, czyli $(m-1)(3m^2+6m-53) = 0$; pierwiastek $\frac{-3+2\sqrt{42}}{3}$ odpada, bo przekracza $\frac{13}{4}$.

19 ODP. $m = -4$

WSK. Żeby warunek zadania był spełniony, f musi być funkcją kwadratową (współczynnik przy x^2 niezerowy), a skoro ma przyjmować wartość największą – parabola musi mieć ramiona skierowane w dół. Pamiętaj o pozostałych warunkach dotyczących pierwiastków.

SKZIC Trzy warunki: $a = \frac{(m+3)(m-2)}{m-5} < 0$, $x_1x_2 = \frac{(m-5)^2}{(m+3)(m-2)} > 0$ oraz $\Delta = -(m-2)(3m+14) > 0$. Razem $-\frac{14}{3} < m < -3$; jedyna liczba całkowita to -4 .

20 ODP. $m \in \langle -\frac{1}{4}, 0 \rangle \cup (2, +\infty)$.

WSK. Przekształć warunek z zadania sprowadzając ułamki z x_1 i x_2 do wspólnego mianownika, a potem zastosuj **wzory skróconego mnożenia** tak, aby móc skorzystać ze

wzorów Viète'a. Zachowaj czujność rozwiązując nierówności wymierne i pamiętaj o założeniach.

SKZIC $\Delta = (m-2)^2$, więc $m \neq 2$; $x_1x_2 = (m+1)(2m-1) \neq 0$. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3m}{(m+1)(2m-1)}$: dodatnie dla $-1 < m < 0$ lub $m > \frac{1}{2}$, a $\leq \frac{2}{3}$ daje $\frac{(4m+1)(m-2)}{(m+1)(2m-1)} \geq 0$. Część wspólna: $[-\frac{1}{4}, 0) \cup (2, +\infty)$.

21 ODP. $m \in \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\}$.

WSK. Zauważ, że równanie ma już jedno rozwiązanie $x = 3$. Stąd aby całe równanie miało dokładnie dwa rozwiązania, to albo wyrażenie kwadratowe musi mieć jedno miejsce zerowe różne od 3 albo dwa różne miejsca zerowe, ale jedno równe 3.

SKZIC $x = 3$ jest zawsze rozwiązaniem. Trójmian ma $\Delta = (5m-1)^2$: albo $\Delta = 0$ ($m = \frac{1}{5}$, pierwiastek $\frac{2}{5} \neq 3$), albo $\Delta > 0$ i jednym z pierwiastków jest 3, czyli $6m^2 - 5m - 6 = 0$: $m = \frac{3}{2}$ lub $m = -\frac{2}{3}$.

22 ODP. $m \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup (1, 3)$.

WSK. Zauważ, że jednym z pierwiastków równania jest już $x = 4$. Zatem, wyrażenie kwadratowe w nawiasie musi zerować się dla dwóch różnych x -ów ($\Delta(m) > 0$), ale żaden z nich nie może być równy 4.

SKZIC $x_3 = 4$; trójmian musi mieć $\Delta = -3m^2 - 2m + 33 > 0$ (czyli $-\frac{11}{3} < m < 3$) i nie zerować się w 4 ($m^2 + 3m - 2 \neq 0$). Z Viète'a nierówność sprowadza się do $m^2 + m - 2 > 0$: $m < -2$ lub $m > 1$. Z przecięcia wypada jeszcze $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

23 ODP. $ZW_f = (\sqrt[3]{4}, 2) \cup (2, 4)$

WSK. Sformułowanie tego zadania jest nieco mylące. Funkcja f nie zależy od x ani m ,

ale od k . Zaczynij od rozwiązania nierówności $\Delta(k) > 0$, nie zapomnij, że $k \neq 0$.

szkic $\Delta = (k-1)^2 - 4k^2 > 0 \iff -1 < k < \frac{1}{3}$, $k \neq 0$. Z Viète'a $m = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = 1 - k \in (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, 2)$, więc $2^m \in (\sqrt[3]{4}, 2) \cup (2, 4)$.

24 odp. $m \in (1, +\infty)$.

WSK. Ramiona są skierowane w górę, więc wystarczą cztery warunki: wierzchołek w przedziale, wartość w wierzchołku ujemna, a na obu końcach przedziału dodatnia.

szkic Wierzchołek $p = \frac{1}{m}$: $f(p) = -m < 0$ daje $m > 0$; $|p| < 2$ daje $|m| > \frac{1}{2}$; $f(2) =$

$(4m-1)(m-1) > 0$ daje $m < \frac{1}{4}$ lub $m > 1$; $f(-2) = 4m^2 + 3m + 1 > 0$ zawsze. Razem $m > 1$.

25 odp. $m \in (-\infty, -1] \cup (4, +\infty)$.

WSK. Zapisz $x_1^4 + x_2^4$ przez $x_1^2 + x_2^2$ i x_1x_2 , a te przez wzory Viète'a – wyjdzie nierówność dwukwadratowa w m .

szkic $\Delta = m(m-4) > 0$. Z $s = -m$, $p = m$: $(m^2 - 2m)^2 - 2m^2 + 4m^3 \geq 3 \iff m^4 + 2m^2 - 3 \geq 0 \iff (m^2 - 1)(m^2 + 3) \geq 0 \iff |m| \geq 1$. Razem $m \leq -1$ lub $m > 4$.