

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

Równania i nierówności z modułem · matura rozszerzona

ZAKRES

MATURY 2015–2026

03





Dzień dobry!

Nazywam się **Tomasz Saweczko**, w internecie jestem znany jako „**Łysy uczy matmy**”. Uczę matematyki od ponad 20 lat, a studiowałem ją na Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu.



DARMOWY KURS DO MATURY ROZSZERZONEJ

Filmy, materiały do pobrania i zadania do samodzielnej pracy – całość prowadzę na YouTube, a komplet zebrany jest tutaj:

lisyuczmatmy.pl/yt-matura-rozszerzona-kurs



ARKUSZE PRÓBNE

Własne arkusze do przećwiczenia całej matury, z rozwiązaniami:

lisyuczmatmy.pl/arkusze



YouTube



TikTok



Instagram



lisyuczmatmy.pl

Powodzenia na maturze – i do zobaczenia na kanale!

Spis treści

1.	Niezbędnik wartości bezwzględnej	4
	Wartość bezwzględna jako odległość	4
	Pierwiastek z kwadratu	5
	Definicja wartości bezwzględnej	6
	Opuszczanie modułu	6
	Własności wartości bezwzględnej	7
	Równania z modułem	7
	Moduł równy wyrażeniu z niewiadomą	9
	Równanie z parametrem	9
	Nierówności z kilkoma modułami	11
	Wspólne miejsce zerowe pod modułami	12
	Moduły ukryte pod pierwiastkami	13
	Nierówność między dwoma modułami	14
2.	Ćwiczenia	15
3.	Dodatek	17
	Wykresy funkcji z modułem	17
	Trzy zadania z mojego zbioru	18
	Odpowiedzi i krótkie rozwiązania	20

Niezbędnik wartości bezwzględnej

Ten rozdział idzie tą samą drogą, co lekcja. Zaczynamy od **odległości na osi** – moduł różnicy to odległość dwóch liczb – i od wzoru $\sqrt{a^2} = |a|$, na którym potyka się najczęściej osób. Potem **definicja**, **opuszczanie modułu** i **własności**. Dalej **równania**: od najprostszych, przez moduł w module, po moduł równy wyrażeniu z niewiadomą i **równanie z parametrem** rozwiązane trzema sposobami. Na koniec **nierówności**: metoda przedziałów, wspólne miejsce zerowe pod modułami, moduły ukryte pod pierwiastkami i nierówność między dwoma modułami. Każda z pięciu ramek z zadaniami CKE ma plaketkę z momentem w filmie.

Wartość bezwzględna jako odległość

Odległość liczb 2 i 7 na osi to $7 - 2 = 5$. Gdy nie wiadomo, która z dwóch liczb jest większa, odejmowanie może dać $2 - 7 = -5$ – a odległość ujemna nie bywa. Wystarczy wziąć wynik w wartości bezwzględnej.

MODUŁ JAKO ODLEGŁOŚĆ

$|a - b|$ to odległość liczb a i b na osi liczbowej, a $|x| = |x - 0|$ – odległość liczby x od zera.

Tak czytany moduł rozwiązuje najprostsze nierówności bez rachunków: zaznaczamy środek i odkładamy odległość w obie strony.

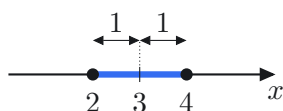
ODLEGŁOŚĆ

PRZYKŁAD Z LEKCJI - 2:00

Rozwiążmy $|x - 3| \leq 1$.

I $|x - 3|$ to odległość x od 3 – ma wynosić co najwyżej 1.

II Od 3 idziemy o 1 w prawo i o 1 w lewo: $x \in \langle 2, 4 \rangle$.

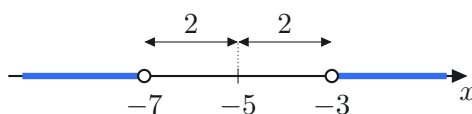


ODLEGŁOŚĆ

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:55

Rozwiążmy $|x + 5| > 2$.

- I $|x + 5| = |x - (-5)|$, więc to odległość x od -5 , a nie od 5 . Punkt odniesienia najprościej znaleźć, wstawiając liczbę, dla której wyrażenie pod modułem się zeruje.
- II Odległość od -5 ma być większa niż 2 , więc końce nie należą: $x \in (-\infty, -7) \cup (-3, +\infty)$.



Pierwiastek z kwadratu

PIERWIASTEK Z KWADRATU

Dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi $\sqrt{a^2} = |a|$.

Bez modułu wzór jest fałszywy dla liczb ujemnych: $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$ – pierwiastek nigdy nie jest ujemny. To jeden z najczęstszych błędów maturzystów; w zadaniu 9 z maja 2023 CKE dopisała ten wzór do treści jako wskazówkę.

PIERWIASTKOWANIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 4:21

Rozwiążmy $(2x - 1)^2 \leq 4$ – bez wymnażania i bez liczenia wyróżnika.

- I Obie strony są nieujemne, więc wolno je spierwiastkować. Pierwiastek z kwadratu to moduł: $|2x - 1| \leq 2$ – a nie $2x - 1 \leq 2$.
- II Pod modułem stoi „coś”. Liczby o module co najwyżej 2 leżą w $\langle -2, 2 \rangle$, więc $-2 \leq 2x - 1 \leq 2$.
- III Dodajemy 1 i dzielimy przez 2 : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, czyli $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$.

Z kroku II warto zrobić regułę. W środku modułu może siedzieć dowolne wyrażenie W – liczy się tylko jego odległość od zera.

MODUŁ Z DOWOLNEGO WYRAŻENIA

Dla $a \geq 0$:

1. $|W| \leq a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a \leq W \leq a$;
2. $|W| \geq a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W \leq -a$ lub $W \geq a$.

Tak samo z nierównościami ostrymi.

Definicja wartości bezwzględnej**DEFINICJA**

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Liczbę nieujemną moduł zostawia w spokoju, a ujemną zamienia na przeciwną – odbija ją symetrycznie względem zera: $|5| = 5$ i $|-5| = 5$, bo obie liczby leżą 5 od zera.

Minus nie znaczy „ujemna”, tylko „przeciwna”. Hasło „moduł zjada minus” i wzór $|-x| = x$ są fałszywe: dla $x = -5$ lewa strona to 5, a prawa -5 . Poprawnie: $|-x| = |x|$ – liczby przeciwne leżą tak samo daleko od zera.

Z tego samego powodu $|a - b| = |b - a|$: różnice wzięte w odwrotnej kolejności są liczbami przeciwnymi ($7 - 2 = 5$, $2 - 7 = -5$), więc mają ten sam moduł. Bywa to wygodne – zamiast $|2 - x|$ można pisać $|x - 2|$.

Opuszczanie modułu

Żeby pozbyć się modułu, trzeba znać znak wyrażenia w środku. W definicji litera x oznacza „cokolwiek”, więc dla $|x - 5|$ o wszystkim decyduje znak $x - 5$:

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{dla } x \geq 5, \\ 5 - x & \text{dla } x < 5. \end{cases}$$

Druga linia to $-(x - 5) = 5 - x$ – różnica wzięta w odwrotnej kolejności.

LICZBY NIEWYMIERNE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 15:03

Zapiszmy bez modułu $|1 - \sqrt{2}|$ oraz $\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2}$.

- I $\sqrt{2} \approx 1,41 > 1$, więc $1 - \sqrt{2} < 0$. Najprościej odwrócić kolejność odejmowania:
 $|1 - \sqrt{2}| = |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$.
- II Pierwiastek z kwadratu to moduł: $\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = |3 - 2\sqrt{2}|$.
- III Znak bez kalkulatora: $3 = \sqrt{9}$ oraz $2\sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$, a $\sqrt{8} < \sqrt{9}$. Wyrażenie jest dodatnie, więc wynik to $3 - 2\sqrt{2}$.

Własności wartości bezwzględnej

WŁASNOŚCI

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b :

- $|-a| = |a|$ oraz $|a - b| = |b - a|$;
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ oraz $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ dla $b \neq 0$;
- $|a|^2 = a^2$;
- $\sqrt{a^2} = |a|$.

Moduł zmienia tylko znak, a dodatni czynnik znaku nie zmienia – dlatego wolno go wyciągnąć przed moduł: $|2(x - 5)| = 2|x - 5|$. Z własności 2 korzysta zadanie z maja 2026 (sekcja *Wspólne miejsce zerowe pod modułami*), z własności 3 – podnoszenie do kwadratu nierówności między modułami (sekcja *Nierówność między dwoma modułami*).

Równania z modułem

DWA PODSTAWOWE RÓWNANIA

- Dla $a \geq 0$: $|W| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W = a$ lub $W = -a$.
- $|A| = |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$ lub $A = -B$.

Dla $a < 0$ równanie $|W| = a$ jest sprzeczne – moduł to odległość, a ta nie bywa ujemna.

W drugiej regule liczby o równych modułach są albo równe, albo przeciwne, jak 5 i -5 .

RÓWNANIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 18:45

Rozwiążmy $|x^2 - 1| = 5$.

- I Pod modułem stoi „coś”, a moduł z czegoś równy 5 znaczy, że to coś jest równe 5 albo -5 : $x^2 - 1 = 5$ lub $x^2 - 1 = -5$.
- II Z pierwszego $x^2 = 6$, czyli $|x| = \sqrt{6}$ i $x = \pm\sqrt{6}$. Drugie daje $x^2 = -4$ – sprzeczne. Rozwiązania: $x = -\sqrt{6}$, $x = \sqrt{6}$.

MODUŁ W MODULE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 19:43

Rozwiążmy $||x - 1| - 2| = 4$.

- I Zdejmujemy zewnętrzny moduł, nie patrząc do środka: $|x - 1| - 2 = 4$ lub $|x - 1| - 2 = -4$, czyli $|x - 1| = 6$ lub $|x - 1| = -2$.
- II $|x - 1| = -2$ jest sprzeczne – **odległość nie może być ujemna**. Zostaje $x - 1 = 6$ lub $x - 1 = -6$, czyli $x = 7$ lub $x = -5$.

DWA MODUŁY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 21:18

Rozwiążmy $|2x - 1| = |3x + 5|$.

- I Moduły są równe, gdy wyrażenia są równe albo przeciwne: $2x - 1 = 3x + 5$ lub $2x - 1 = -(3x + 5)$.
- II Dwa równania liniowe: $x = -6$ lub $5x = -4$, czyli $x = -\frac{4}{5}$.

Moduł równy wyrażeniu z niewiadomą

Reguła „ $|W| = a$, więc $W = \pm a$ ” wymaga, żeby a było nieujemne. Gdy po prawej stoi wyrażenie z x , tego nie wiadomo z góry.

MAJ 2022 · ZADANIE NR 7

POZIOM WYKONANIA 44%

W FILMIE 22:41

3 PKT

Rozwiąż równanie:

$$|x - 3| = 2x + 11.$$

Na co zwrócić uwagę. Rozpisanie bez zastanowienia, $x-3 = 2x+11$ lub $x-3 = -2x-11$, daje dwóch kandydatów: $x = -14$ i $x = -\frac{8}{3}$. Ale dla $x = -14$ prawa strona to -17 , a lewa 17 – moduł nie może być równy liczbie ujemnej. Dlatego na starcie zakładamy

$$2x + 11 \geq 0, \quad \text{czyli} \quad x \geq -\frac{11}{2},$$

i od razu odrzucamy -14 . Odpowiedź: $x = -\frac{8}{3}$.

Można też bez założenia – „metodą starożytnych”: rozwiązać, a potem sprawdzić obu kandydatów w równaniu. W równaniach to działa; w nierównościach już nie.

Równanie z parametrem

CZERWIEC 2020 · ZADANIE NR 6

POZIOM WYKONANIA 28%

W FILMIE 27:12

3 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie

$$|x - 5| = (a - 1)^2 - 4$$

ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

Na co zwrócić uwagę. Całe wyrażenie $(a - 1)^2 - 4$ oznaczamy jedną literą m – i **nie** **wymnażamy nawiasu**. Pytanie brzmi wtedy: dla jakich m równanie $|x - 5| = m$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie? Rozwiązania w ogóle są tylko dla $m \geq 0$, a dwa różne – dla $m > 0$ (dla $m = 0$ jest jedno: $x = 5$).

W lekcji ten warunek pada trzema sposobami.

Sposób I: równanie kwadratowe. Dla $m > 0$ obie strony równania są nieujemne, więc wolno

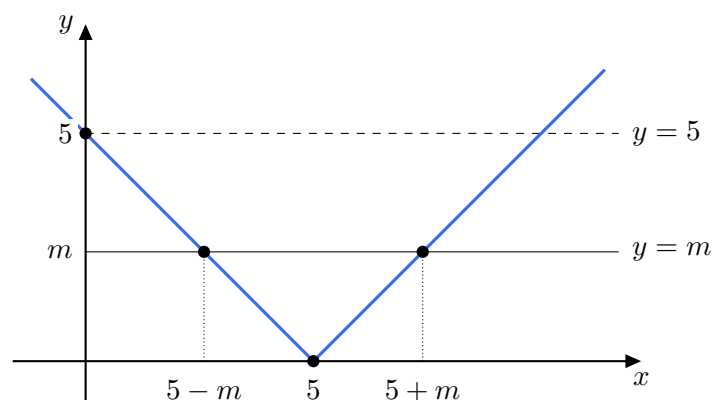
je podnieść do kwadratu, a $|x - 5|^2 = (x - 5)^2$:

$$x^2 - 10x + 25 - m^2 = 0.$$

Rozwiązania są dwa (to samo równanie, tylko w innej postaci), a dodatnie są oba, gdy ich iloczyn i suma są dodatnie. Ze wzorów Viète'a $x_1 x_2 = 25 - m^2 > 0$ oraz $x_1 + x_2 = 10 > 0$. Z $m^2 < 25$ i $m > 0$ wychodzi $0 < m < 5$.

Podniesienie równania do kwadratu daje równanie równoważne **tylko wtedy, gdy obie strony są tego samego znaku**. Równanie $x = 1$ po podniesieniu zmienia się w $x^2 = 1$, które ma jeszcze rozwiązanie -1 . Dlatego tu najpierw zakładamy $m > 0$, a dopiero potem podnosimy.

Sposób II: wykres. Liczba rozwiązań równania $|x - 5| = m$ to liczba punktów wspólnych wykresu $y = |x - 5|$ z poziomą prostą $y = m$.



Dla $0 < m < 5$ prosta tnie „dzióbek” w dwóch punktach i oba mają dodatnie odcięte. Dla $m = 5$ lewy punkt wypada w zerze, a wyżej jest już ujemny; dla $m = 0$ zostaje jeden punkt, poniżej – żadnego. Odczytujemy $0 < m < 5$ bez rachunków.

Sposób III: wprost z definicji. Dla $m > 0$ mamy $x = 5 + m$ lub $x = 5 - m$ – to różne liczby, bo $m \neq -m$. Pierwsza jest dodatnia zawsze, druga wtedy, gdy $m < 5$. Znowu $0 < m < 5$. Zostaje wrócić do a . Dodajemy 4 do wszystkich stron nierówności $0 < (a - 1)^2 - 4 < 5$ i pierwiastkujemy – wszystkie strony są dodatnie, a pierwiastek z kwadratu to moduł:

$$4 < (a - 1)^2 < 9 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 < |a - 1| < 3.$$

Odległość a od 1 ma być większa od 2, ale mniejsza od 3:

$$a \in (-2, -1) \cup (3, 4).$$

Dwie nierówności kwadratowe z osobnymi wyróżnikami okazały się zbędne.

Nierówności z kilkoma modułami

Gdy modułów jest kilka, wyrażeń w środku nie da się „uwolnić” inaczej niż przez przypadki: w każdym przedziale osi każde z nich ma stały znak.

METODA PRZEDZIAŁÓW

1. Znajdź miejsca zerowe wyrażeń pod modułami i podziel nimi oś na przedziały. Końce przypisz dowolnie – byle przedziały skleły się w całą oś.
2. W każdym przedziale opuść moduły: wyrażenie nieujemne bez zmian, ujemne – z minusem przed nawiasem.
3. Rozwiąż otrzymaną nierówność i **weź część wspólną** z przedziałem, w którym jesteś.
4. Odpowiedź to suma wyników ze wszystkich przedziałów.

MAJ 2025 · ZADANIE NR 5

POZIOM WYKONANIA 52%

W FILMIE 45:54

4 PKT

Rozwiąż nierówność

$$|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2.$$

Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. Moduły zerują się w -3 i w 2 , więc przypadki są trzy. Poniżej -3 oba wyrażenia są ujemne, powyżej 2 oba dodatnie – coś ciekawego dzieje się tylko w środku, gdzie $x + 3 \geq 0$, a $x - 2 \leq 0$.

1. $x < -3$: $-(x - 2) + 2(x + 3) < -2$, czyli $x < -10$ – mieści się w przypadku: $(-\infty, -10)$.
2. $-3 \leq x \leq 2$: $-(x - 2) - 2(x + 3) < -2$, czyli $-3x < 2$ i $x > -\frac{2}{3}$ – po przecięciu z przypadkiem $(-\frac{2}{3}, 2)$.
3. $x > 2$: $(x - 2) - 2(x + 3) < -2$, czyli $x > -6$ – po przecięciu z przypadkiem $(2, +\infty)$.

Dwa ostatnie przedziały skleją się w dwójce: $x \in (-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Wspólne miejsca zerowe pod modułami

Przypadki zawsze działają, ale bywają nużące. Zanim się za nie weźmiesz, sprawdź, czy wyrażenia pod modułami nie zerują się w tym samym punkcie.

MAJ 2026 · ZADANIE NR 5

W FILMIE 57:40

4 PKT

Rozwiąż nierówność

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0.$$

Zapisz obliczenia.

Na co zwrócić uwagę. $2x - 6$ zeruje się w 3, a $x^2 - 9$ w ± 3 – trójka jest wspólna. Z twierdzenia Bézouta (albo ze wzoru na różnicę kwadratów) $x - 3$ da się wyłączyć, a moduł iloczynu to iloczyn modułów:

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| = 2|x - 3| - |x - 3| \cdot |x + 3| = |x - 3| (2 - |x + 3|) < 0.$$

Teraz **pułapka**: moduł jest *nieujemny*, nie dodatni. Dla $x = 3$ lewa strona to 0, a $0 < 0$ jest fałszem – trójkę wyrzucamy. Dla $x \neq 3$ czynnik $|x - 3|$ jest dodatni i o znaku decyduje nawias:

$$2 - |x + 3| < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x + 3| > 2.$$

Odległość x od -3 większa niż 2 daje $x < -5$ lub $x > -1$. Bez trójki: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Gdyby zamiast nierówności stało równanie $|x - 3| (2 - |x + 3|) = 0$, postać iloczynowa też rozwiązałaby je od ręki: $x = 3$ albo $|x + 3| = 2$.

Moduły ukryte pod pierwiastkami

Tą samą metodą przedziałów rozwiązuje się zadanie, w którym modułów na pierwszy rzut oka nie ma – ukrywają się pod pierwiastkami z kwadratów.

MAJ 2023 · ZADANIE NR 9

POZIOM WYKONANIA 52%

W FILMIE 1:06:45

4 PKT

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ dla każdej liczby rzeczywistej a .

Na co zwrócić uwagę. Wskazówka zdradza, że pod pierwiastkami stoją kwadraty: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ oraz $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Po spierwiastkowaniu

$$|x + 2| < \frac{25}{3} - |x - 3|, \quad \text{czyli} \quad |x + 2| + |x - 3| < \frac{25}{3},$$

i dalej trzy przypadki z punktami -2 oraz 3 . Poniżej -2 wychodzi $-2x + 1 < \frac{25}{3}$, czyli $x > -\frac{11}{3}$; w środku $5 < \frac{25}{3}$ – zawsze prawda; powyżej 3 wychodzi $2x - 1 < \frac{25}{3}$, czyli $x < \frac{14}{3}$. Razem: $x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

Nierówność między dwoma modułami

Nierówność $|A| < |B|$ ma obie strony nieujemne, więc można ją podnieść do kwadratu bez zmiany zbioru rozwiązań, a $|A|^2 = A^2$.

DWA MODUŁY

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 1:08:08

Wyznamy największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $|x| < |x - 1025|$ (matura z czerwca 2015).

- I Obie strony są nieujemne, podnosimy do kwadratu: $x^2 < (x - 1025)^2$.
- II Prawej strony **nie** **wymnażamy do końca**: $x^2 < x^2 - 2 \cdot 1025x + 1025^2$, więc $2 \cdot 1025x < 1025^2$. Dzielimy przez 1025: $2x < 1025$, czyli $x < 512,5$.
- III Największa liczba całkowita mniejsza od 512,5 to 512.

Ten sam wynik widać z odległości: $|x| < |x - 1025|$ znaczy, że x leży bliżej 0 niż 1025, czyli na lewo od środka odcinka, $\frac{1025}{2} = 512,5$.

2

Ćwiczenia

1 Zapisz liczbę bez symbolu wartości bezwzględnej i bez pierwiastka z kwadratu.

a) $|2 - \sqrt{5}|$

d) $|\sqrt{7} - 3| + |\sqrt{7} - 2|$

b) $|\sqrt{3} - 1|$

e) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$

c) $|\pi - 4|$

f) $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$

2 Odczytaj nierówność jako warunek na odległość na osi liczbowej i ją rozwiąż.

a) $|x - 4| \leq 3$

c) $|x - 1| > 4$

e) $|3 - x| \leq 2$

b) $|x + 2| < 5$

d) $|x + 6| \geq 1$

f) $|2x - 5| < 3$

3 Rozwiąż nierówność, pierwiastkując obie strony.

a) $(x - 3)^2 \leq 16$

c) $x^2 - 6x + 9 < 4$

b) $(2x + 1)^2 > 9$

d) $4x^2 + 4x + 1 \geq 25$

4 Zapisz wyrażenie bez symbolu wartości bezwzględnej, rozpatrując przedziały.

a) $|x + 4|$

c) $|x| + |x - 2|$

b) $|3 - 2x|$

d) $|x^2 - 4|$

5 Rozwiąż równanie.

a) $|x - 2| = 7$

c) $|x^2 - 5| = 4$

e) $||x + 2| - 4| = 3$

b) $|2x + 3| = 0$

d) $||x| - 3| = 1$

f) $|x - 1| = |2x + 4|$

6 Rozwiąż równanie.

a) $|x + 1| = 2x - 4$

c) $|x - 4| = -3x$

b) $|2x - 5| = x - 1$

d) $|x^2 - 4| = 3x$

7 Rozwiąż zadanie z parametrem.

a) Wyznacz liczbę rozwiązań równania $|x - 3| = m$ w zależności od parametru m .

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie $|x + 2| = a^2 - 1$ ma dwa różne rozwiązania ujemne.

c) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $|x - 4| = m - 1$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

8 Rozwiąż nierówność metodą przedziałów.

a) $|x - 1| + |x + 3| \leq 6$

b) $|x + 2| - |x - 1| > 1$

c) $2|x - 1| - |x + 4| \geq 1$

9 Rozwiąż nierówność, wyłączając wspólny czynnik spod modułów.

a) $|3x - 6| - |x^2 - 4| \geq 0$

b) $|x^2 - 1| < 2|x - 1|$

c) $|x^2 - 5x| \leq |2x - 10|$

10 Rozwiąż zadanie, podnosząc obie strony nierówności do kwadratu.

a) Rozwiąż nierówność $|x - 3| < |x + 1|$.

b) Rozwiąż nierówność $|2x + 1| \geq |x - 4|$.

c) Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $|x| < |x - 2027|$.

11 Zamień pierwiastki z kwadratów na moduły i rozwiąż.

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} < 8$

b) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2x - 1$

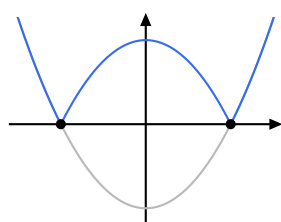
Dodatek

Wykresy funkcji z modułem

Te przekształcenia wypadły z wymagań na maturę 2026, ale warto je znać – pokazują, co moduł robi z wykresem.

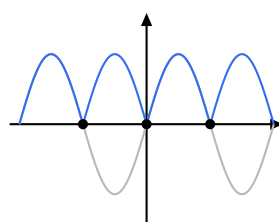
Wykres $y = |f(x)|$. Moduł działa na *wartości* funkcji. Część wykresu nad osią Ox zostaje bez zmian, a część pod osią odbija się symetrycznie względem tej osi.

Wykres $y = f(|x|)$. Moduł działa na *argumentcie*. Dla x i $-x$ funkcja dostaje tę samą liczbę $|x|$, więc przyjmuje tę samą wartość – wykres jest symetryczny względem osi Oy . Wartości f dla ujemnych argumentów nie są w ogóle używane: lewą połowę wykresu f skreślamy, a prawą odbijamy na lewo.



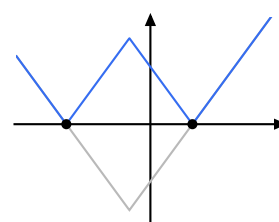
$$f(x) = x^2 - 3$$

$$y = |f(x)| = |x^2 - 3|$$



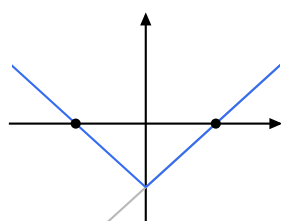
$$f(x) = \sin x$$

$$y = |f(x)| = |\sin x|$$



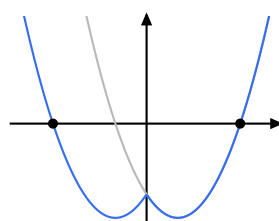
$$f(x) = |x + 1| - 3$$

$$y = |f(x)| = ||x + 1| - 3|$$



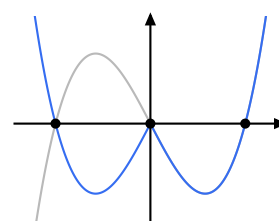
$$f(x) = x - 2$$

$$y = f(|x|) = |x| - 2$$



$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$y = f(|x|) = x^2 - 2|x| - 3$$



$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$y = f(|x|) = |x|^3 - 3|x|$$

Górny rząd to $|f(x)|$, dolny $f(|x|)$; na szaro wykres f . Trzecia komórka u góry pokazuje, jak rysuje się „literę W” $y = ||x + 1| - 3|$: od $y = |x|$ przez przesunięcie o 1 w lewo, potem o 3 w dół, na końcu odbicie tego, co pod osią. Powtarzanie ostatnich dwóch kroków daje coraz więcej ząbków:

$$|x - 1|, \quad ||x - 1| - 1|, \quad |||x - 1| - 1| - 1|, \quad \dots$$

– każdy kolejny moduł dokłada jeden ząbek o wysokości 1.

Trzy zadania z mojego zbioru

Zadania spoza arkuszy CKE, ale na narzędziach z tej lekcji: dziedzina przy parametrze, podstawienie $t = |x|$ i pierwiastek z kwadratu.

MÓJ ZBIÓR ZADAŃ

W FILMIE 1:18:22

4 PKT

Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$\frac{|x - m| - 3}{x - 2} = 0$$

w zależności od parametru m . Zapisz odpowiednie założenia.

Na co zwrócić uwagę. Najpierw dziedzina: $x \neq 2$. Ułamek jest zerem, gdy zeruje się licznik, więc $|x - m| = 3$, czyli $x = m + 3$ lub $x = m - 3$. To zawsze dwie różne liczby – i tu łatwo skończyć z odpowiedzią „zawsze dwa rozwiązania”. Ale obie zależą od m i każda może trafić w wykluczoną dwójkę: $m + 3 = 2$ dla $m = -1$, a $m - 3 = 2$ dla $m = 5$. Dla $m = -1$ zostaje tylko $x = -4$, dla $m = 5$ tylko $x = 8$. **Odpowiedź:** dla $m \in \{-1, 5\}$ jedno rozwiązanie, dla pozostałych m dwa.

MÓJ ZBIÓR ZADAŃ

W FILMIE 1:23:52

3 PKT

Udowodnij, że nierówność

$$x^4 - 4|x| + 3 \geq 0$$

jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x .

Na co zwrócić uwagę. Parzystą potęgą nie widzi znaku: $x^4 = |x|^4$. Nierówność to więc $|x|^4 - 4|x| + 3 \geq 0$, a po podstawieniu $t = |x|$, przy czym $t \geq 0$:

$$f(t) = t^4 - 4t + 3 \geq 0.$$

Pochodna $f'(t) = 4t^3 - 4 = 4(t - 1)(t^2 + t + 1)$ – trójmian w nawiasie ma $\Delta = -3 < 0$, więc jest stale dodatni i znak pochodnej zależy tylko od $t - 1$. Funkcja maleje na $\langle 0, 1 \rangle$ i rośnie na $\langle 1, +\infty \rangle$, więc najmniejszą wartość przyjmuje w $t = 1$: $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$. Stąd $f(t) \geq 0$ dla każdego $t \geq 0$. Bez pochodnej też się da: $t^4 - 4t + 3 = (t - 1)^2(t^2 + 2t + 3)$.

Udowodnij, że liczba

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$$

jest całkowita.

Na co zwrócić uwagę. Liczby pod pierwiastkami muszą być kwadratami. Szukamy $(a - b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2}$ równego $11 - 6\sqrt{2}$: pasują $a = 3$, $b = 1$. Podobnie $6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2$. Pierwiastki z kwadratów to moduły:

$$|3 - \sqrt{2}| + |2 + \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 5,$$

bo oba wyrażenia w modułach są dodatnie.

12 ★ Narysuj wykres funkcji $f(x) = ||x| - 2|$ i wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

13 ★ Wyznacz wszystkie miejsca zerowe funkcji $g(x) = |||x| - 1| - 1| - 1|$.

14 ★ Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Do każdego zadania wynik i szkic rozwiązania: sam klucz, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 ODP. a) $\sqrt{5} - 2$; b) $\sqrt{3} - 1$; c) $4 - \pi$; d) 1; e) 1; f) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

SZKIC Wyrażenie ujemne zamieniamy na przeciwne. a) $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$. c) $\pi < 4$. d) $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$ i $\sqrt{7} > 2$, więc $(3 - \sqrt{7}) + (\sqrt{7} - 2) = 1$. e) Pierwiastki z kwadratów to moduły: $(\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1$. f) $3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

2 ODP. a) $\langle 1, 7 \rangle$; b) $(-7, 3)$; c) $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$; d) $(-\infty, -7) \cup \langle -5, +\infty \rangle$; e) $\langle 1, 5 \rangle$; f) $(1, 4)$.

SZKIC Środek i promień: a) 4 i 3; b) -2 i 5; c) 1 i 4, na zewnątrz; d) -6 i 1, na zewnątrz; e) $|3 - x| = |x - 3|$, środek 3, promień 2; f) $|2x - 5| < 3$ to $-3 < 2x - 5 < 3$.

3 ODP. a) $\langle -1, 7 \rangle$; b) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; c) $(1, 5)$; d) $(-\infty, -3) \cup \langle 2, +\infty \rangle$.

SZKIC Pierwiastek z kwadratu to moduł. a) $|x - 3| \leq 4$. b) $|2x + 1| > 3$. c) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, więc $|x - 3| < 2$. d) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$, więc $|2x + 1| \geq 5$.

4 ODP. a) $x + 4$ dla $x \geq -4$, $-x - 4$ dla $x < -4$; b) $3 - 2x$ dla $x \leq \frac{3}{2}$, $2x - 3$ dla $x > \frac{3}{2}$; c) $-2x + 2$ dla $x < 0$, 2 dla $0 \leq x \leq 2$, $2x - 2$ dla $x > 2$; d) $x^2 - 4$ dla $x \leq -2$ lub $x \geq 2$, $4 - x^2$ dla $-2 < x < 2$.

SZKIC O postaci decyduje znak wyrażenia pod modułem. W c) dwa moduły, więc

trzy przedziały z punktami 0 i 2; w środku $x + (2 - x) = 2$. W d) $x^2 - 4 \geq 0$ dla $|x| \geq 2$.

5 ODP. a) -5, 9; b) $-\frac{3}{2}$; c) -3, -1, 1, 3; d) -4, -2, 2, 4; e) -9, -3, -1, 5; f) -5, -1.

SZKIC c) $x^2 - 5 = \pm 4$, czyli $x^2 = 9$ lub $x^2 = 1$. d) $|x| - 3 = \pm 1$, czyli $|x| = 4$ lub $|x| = 2$. e) $|x + 2| - 4 = \pm 3$, czyli $|x + 2| = 7$ lub $|x + 2| = 1$. f) $x - 1 = 2x + 4$ lub $x - 1 = -(2x + 4)$.

6 ODP. a) 5; b) 2, 4; c) -2; d) 1, 4.

SZKIC Najpierw założenie: prawa strona nieujemna. a) $x \geq 2$; kandydaci 5 i 1, zostaje 5. b) $x \geq 1$; $x = 4$ lub $x = 2$, oba dobre. c) $x \leq 0$; kandydaci 1 i -2, zostaje -2. d) $x \geq 0$; $x^2 - 3x - 4 = 0$ daje 4 i -1, $x^2 + 3x - 4 = 0$ daje 1 i -4; zostają 1 i 4.

7 ODP. a) dla $m < 0$ brak rozwiązań, dla $m = 0$ jedno, dla $m > 0$ dwa; b) $a \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$; c) $m \in (1, 5)$.

SZKIC b) Rozwiązania $x = -2 \pm (a^2 - 1)$; dwa różne dla $a^2 - 1 > 0$, oba ujemne, gdy $-2 + (a^2 - 1) < 0$. Stąd $1 < a^2 < 3$, czyli $1 < |a| < \sqrt{3}$. c) $x = 4 \pm (m - 1)$; potrzeba $m - 1 > 0$ i $4 - (m - 1) > 0$.

8 ODP. a) $\langle -4, 2 \rangle$; b) $(0, +\infty)$; c) $(-\infty, -1) \cup \langle 7, +\infty \rangle$.

SZKIC a) Punkty -3 i 1: dla $x < -3$ mamy $-2x - 2 \leq 6$, w środku $4 \leq 6$ (zawsze), dla $x \geq 1$ mamy $2x + 2 \leq 6$. b) Punkty

-2 i 1 : po lewej $-3 > 1$ (nigdy), w środku $2x + 1 > 1$, po prawej $3 > 1$ (zawsze).

c) Punkty -4 i 1 : po lewej $-x + 6 \geq 1$, w środku $-3x - 2 \geq 1$, po prawej $x - 6 \geq 1$.

9 ODP. a) $\langle -5, 1 \rangle \cup \{2\}$; b) $(-3, 1)$; c) $\langle -2, 2 \rangle \cup \{5\}$.

SZKIC a) $|x - 2| (3 - |x + 2|) \geq 0$: równość dla $x = 2$, poza tym $|x + 2| \leq 3$. b)

$|x - 1| (|x + 1| - 2) < 0$: $x \neq 1$ i $|x + 1| < 2$.

c) $|x - 5| (|x| - 2) \leq 0$: $x = 5$ albo $|x| \leq 2$.

10 ODP. a) $(1, +\infty)$; b) $(-\infty, -5) \cup \langle 1, +\infty \rangle$; c) 1013 .

SZKIC a) $(x - 3)^2 < (x + 1)^2$ daje $8 < 8x$. b) $3x^2 + 12x - 15 \geq 0$, czyli $(x + 5)(x - 1) \geq 0$. c) $2 \cdot 2027x < 2027^2$, więc $x < 1013,5$.

11 ODP. a) $(-5, 3)$; b) 2 .

SZKIC a) $|x - 1| + |x + 3| < 8$ i metoda przedziałów: $(-5, -3)$, $(-3, 1)$, $(1, 3)$. b) $|x - 5| = 2x - 1$ przy założeniu $x \geq \frac{1}{2}$; kandydaci -4 i 2 , zostaje 2 .

Dodatek

12 ODP. $m < 0$ – brak; $m = 0$ – dwa;

$0 < m < 2$ – cztery; $m = 2$ – trzy; $m > 2$ – dwa.

SZKIC Wykres $|x| - 2$ ma dołek -2 w zerze; po odbiciu części pod osią powstaje „W” z dołkami w ± 2 i garbem 2 w zerze. Prosta $y = m$ przez garb tnie wykres w 0 i ± 4 .

13 ODP. $-3, -1, 1, 3$.

SZKIC $g(x) = 0$, gdy $||x| - 1| - 1| = 1$, czyli $||x| - 1| = 2$ lub $||x| - 1| = 0$. Pierwsze daje $|x| = 3$ (bo $|x| = -1$ odpada), drugie $|x| = 1$.

14 zadanie na dowód

SZKIC Obie strony są nieujemne, więc wystarczy porównać kwadraty: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oraz $(|a| + |b|)^2 = a^2 + 2|a||b| + b^2$. Nierówność sprowadza się do $ab \leq |ab|$, a to prawda dla każdej liczby.