



WIELOMIANY I WYMIERNE

Od definicji do zadań maturalnych · matura rozszerzona

ZAKRES

MATURY 2015–2026

02





Dzień dobry!

Nazywam się **Tomasz Saweczko**, w internecie jestem znany jako „**Łysy uczy matmy**”. Uczę matematyki od ponad 20 lat, a studiowałem ją na Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu.



DARMOWY KURS DO MATURY ROZSZERZONEJ

Filmy, materiały do pobrania i zadania do samodzielnej pracy – całość prowadzę na YouTube, a komplet zebrany jest tutaj:

lysyuczmatmy.pl/yt-matura-rozszerzona-kurs



ARKUSZE PRÓBNE

Własne arkusze do przećwiczenia całej matury, z rozwiązaniami:

lysyuczmatmy.pl/arkusze



YouTube



TikTok



Instagram



lysyuczmatmy.pl

Powodzenia na maturze – i do zobaczenia na kanale!

Spis treści

1.	Niezbędnik wielomianów	4
	Definicja, współczynniki i stopień	4
	Jak wyglądają wykresy wielomianów	5
	Suma współczynników to $W(1)$	6
	Mnożenie wielomianów potęgą po potędze	7
	Dzielenie z resztą i podzielność	8
	Algorytm dzielenia pisemnego	10
	Schemat Hornera	11
	Twierdzenie Bézouta i twierdzenie o reszcie	13
	Najtrudniejsze zadanie z wielomianów	13
	Reszta z dzielenia przez wielomian stopnia drugiego	14
	Rozkład na czynniki i równania wielomianowe	16
	Nierówności wielomianowe	19
	Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych	21
	Dowodzenie nierówności pochodną	22
	Nierówności wymierne	23
2.	Ćwiczenia	26
3.	Dodatek	30
	Ciekawostki z pierwszej części filmu	30
	Ponad program: krotność i nierozkładalność	31
	Odpowiedzi i krótkie rozwiązania	33

Niezbędnik wielomianów

Ten rozdział idzie tą samą drogą, co lekcja. Zaczynamy od **definicji**: co jest współczynnikiem, który z nich jest wiodący, czym jest stopień i dlaczego brakująca potęga to współczynnik zero. Potem **wykresy** – co o kształcie mówią sam stopień i znak współczynnika wiodącego. Dalej fakt, z którego korzysta najtrudniejsze maturalne zadanie z wielomianów: **suma współczynników to $W(1)$** . Potem rada rachunkowa – jak **mnożyć wielomiany potęgą po potędze**, żeby niczego nie zgubić. Dalej **dzielenie z resztą**, opowiedziane przez analogię do liczb całkowitych, i dwa sposoby jego wykonania: **algorytm pisemny** oraz **schemat Hornera**. Z dzielenia przez dwumian wynika **twierdzenie Bézouta** i twierdzenie o reszcie, a tuż za nimi stoi **najtrudniejsze zadanie** w historii tej matury oraz **reszta z dzielenia przez wielomian stopnia drugiego**. Dalej **rozkład na czynniki**: zgadywanie pierwiastka, rozkład bez dzielenia i wielomian $x^4 + 1$ rozłożony na dwa sposoby. Na koniec to, po co całe to narzędzie powstało: **nierówności wielomianowe** wraz z krotnością pierwiastków, **twierdzenie o pierwiastkach wymiernych**, które stoi za zgadywaniem, **dowodzenie nierówności pochodną** oraz **nierówności wymierne** – dwie ostatnie sekcje z zadaniami CKE.

Definicja, współczynniki i stopień

Wielomian to funkcja zbudowana z dwóch działań: dodawania i mnożenia. Ogólny wzór wygląda groźnie, ale zawsze oznacza to samo – sumę potęg x pomnożonych przez liczby:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ to **współczynniki** wielomianu. Dwa z nich mają własne nazwy: a_n , przy najwyższej potędze, to **współczynnik wiodący**, a a_0 to **wyraz wolny**. W funkcji kwadratowej $ax^2 + bx + c$ wyrazem wolnym jest c , a współczynnikiem wiodącym a – ten sam, który decydował, czy ramiona paraboli idą w górę, czy w dół; przy wielomianach wyższych stopni gra podobną rolę. Funkcja liniowa $ax + b$ z $a \neq 0$ jest wielomianem stopnia pierwszego, funkcja kwadratowa – stopnia drugiego. Współczynniki numerujemy od zera, więc jest ich zawsze o jeden więcej, niż wynosi stopień.

Współczynnik przy potędze, której we wzorze **nie ma**, jest równy zero – i trzeba go policzyć. Wielomian $W(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^2 + x - 7$ ma sześć współczynników: 2, -3,

0, 5, 1, -7, bo przy x^3 nic nie stoi. Druga pułapka to jedynka: w wielomianie $W(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 1$ pierwszym współczynnikiem jest 1 (przy x^3), więc suma współczynników wynosi $1 + 5 - 7 + 1 = 0$, a nie $5 - 7 + 1 = -1$.

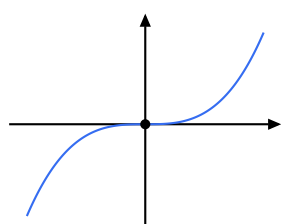
Stopień wielomianu to najwyższa potęga x , która występuje we wzorze z niezerowym współczynnikiem; oznaczamy go $\deg W$ (w szkole spotyka się też zapis $\text{st } W$). Nie ma obowiązku pisać wyrazów od najwyższej potęgi: $5x^7 - x^{11} + x^{10} + 10x^{18}$ jest wielomianem stopnia 18, bo dodawanie jest przemienne i kolejność składników niczego nie zmienia. Wielomian stały, na przykład $W(x) = 3$, ma stopień 0. Wielomian zerowy, $W(x) = 0$, jest przypadkiem osobnym: umawiamy się, że jego stopień wynosi $-\infty$. To nie kaprys – dzięki tej konwencji bez wyjątków działają dwie reguły, z których korzysta się przy dzieleniu.

$$\deg(W \cdot Q) = \deg W + \deg Q, \quad \deg(W + Q) \leq \max(\deg W, \deg Q)$$

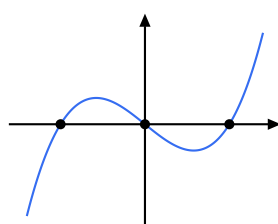
Pierwsza reguła bierze się stąd, że najwyższą potęgę iloczynu daje wyłącznie iloczyn najwyższych potęg: $(x^7 + \dots)(x^5 + \dots) = x^{12} + \dots$, a żadne mnożenie niższych potęg do x^{12} nie dosięgnie. Gdyby wielomian zerowy miał stopień 0, reguła by kłamała: $0 \cdot x^5$ to wielomian zerowy, a nie wielomian stopnia $0 + 5$. Z $-\infty + 5 = -\infty$ wszystko się zgadza. Druga reguła jest nierównością, bo przy dodawaniu najwyższe potęgi mogą się skasować: $x^7 + (-x^7 + x^2) = x^2$ – suma dwóch wielomianów stopnia siódmego ma stopień drugi.

Jak wyglądają wykresy wielomianów

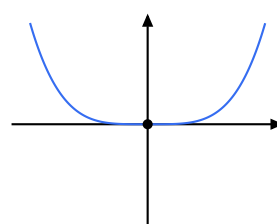
Prosta i parabola to wielomiany stopnia pierwszego i drugiego. Od stopnia trzeciego ten sam stopień dopuszcza już bardzo różne kształty.



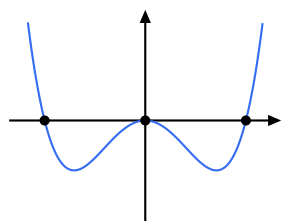
$$y = x^3$$



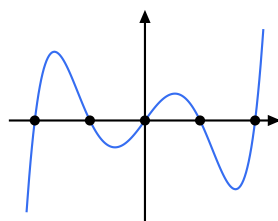
$$y = x^3 - x$$



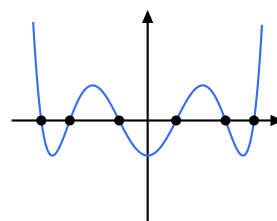
$$y = x^4$$



$$y = x^4 - 2x^2$$



$$y = x^5 - 5x^3 + 4x$$



$$y = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

Górny rząd: x^3 rośnie bez zakrętów i ma jedno miejsce zerowe, ale $x^3 - x$ jest tego samego stopnia, a ma trzy miejsca zerowe oraz górkę i dołek; x^4 przypomina parabolę, tylko bardziej płaską przy zerze. Dolny rząd: $x^4 - 2x^2$ ma dwa dołki i garb, a dwa ostatnie wielomiany wyciskają ze swojego stopnia wszystko – stopień piąty daje pięć miejsc zerowych i cztery zakręty, szósty sześć miejsc zerowych i pięć zakrętów.

TRZY REGUŁY

Dla wielomianu stopnia n o współczynniku wiodącym a_n :

1. miejsc zerowych jest **co najwyżej** n ;
2. zakrętów (ekstremów lokalnych) jest **co najwyżej** $n - 1$, bo w zakręcie zeruje się pochodna, a ta jest stopnia $n - 1$;
3. o krańcach decydują wyłącznie n i znak a_n : przy n **parzystym** oba ramiona idą w tę samą stronę (w górę, gdy $a_n > 0$), przy n **nieparzystym** – w przeciwnie (z lewej do $-\infty$, z prawej do $+\infty$, gdy $a_n > 0$).

Z dużej odległości każdy wielomian wygląda jak sam jednomian $a_n x^n$ – cała ciekawa część wykresu mieści się na ograniczonym kawałku osi. Z reguły trzeciej płynie wniosek, do którego wrócimy w dodatku: wykres wielomianu nieparzystego stopnia biegnie od $-\infty$ do $+\infty$, więc musi przeciąć oś Ox . Przy stopniu parzystym gwarancji nie ma – $x^4 + 1$ nie zeruje się nigdy.

Suma współczynników to $W(1)$

Podstawmy do ogólnego wzoru $x = 1$. Każda potęga jedynki jest jedynką, więc z każdego składnika zostaje sam współczynnik:

$$W(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = W(1)$$

Suma wszystkich współczynników wielomianu jest równa $W(1)$. Ta obserwacja zamienia niewykonalne rachunki w jedną liniijkę. Wielomian $W(x) = (1 - 2x)^{2027}$ ma po rozwinięciu 2028 składników – podnosząc dwumian do drugiej potęgi, dostajemy trzy wyrazy, do trzeciej cztery, więc do potęgi 2027 wyjdzie ich 2028. Nikt tego nie wypisze. A suma współczynników to po prostu

$$W(1) = (1 - 2)^{2027} = (-1)^{2027} = -1,$$

bo -1 w nieparzystej potęgce daje -1 . Ten sam fakt otwiera najtrudniejsze zadanie z wielomianów w historii matury rozszerzonej (maj 2015), które stoi w dalszej części rozdziału: zdanie „suma wszystkich czterech współczynników jest równa 0” znaczy tam po prostu $W(1) = 0$.

Podstawienie $x = -1$ zmienia znak przy nieparzystych potęgach i zostawia parzyste: $W(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$. Dodając $W(1)$ i $W(-1)$, kasujemy nieparzyste współczynniki i podwajamy parzyste, więc

$$a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{W(1) + W(-1)}{2}.$$

Dla $W(x) = (1 - 2x)^{2027}$ mamy $W(-1) = 3^{2027}$, zatem suma współczynników przy parzystych potęgach (wyraz wolny też się liczy, bo 0 jest parzyste) wynosi $\frac{-1 + 3^{2027}}{2}$.

Mnożenie wielomianów potęga po potęgce

Mnożenie „wszystko przez wszystko” daje przy dwóch trójmianach dziewięć iloczynów w jednej długiej linii i dziewięć okazji do pomyłki. Lepiej odwrócić kolejność: iść po potęgach x od najwyższej i przy każdej pytać, z których mnożeń mogę ją dostać. Wynik wychodzi od razu uporządkowany, a każdy współczynnik ma obok siebie własny rachunek.

MNOŻENIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI • 45:25

Wymnóżmy $(x^3 - 2x^2 + 1)(x^2 + 7x + 1)$, zbierając wyrazy potęga po potęgce.

- I Najwyższa potęga. Piątą potęgę daje tylko $x^3 \cdot x^2$ – żadne inne mnożenie tak wysoko nie sięga. Zaczynamy więc od x^5 , z współczynnikiem 1.
- II Czwarta potęga. Przeglądamy pierwszy nawias składnik po składniku: x^3 trzeba pomnożyć przez $7x$, a $-2x^2$ przez x^2 ; wyraz wolny 1 nie da x^4 z niczym. Stąd $(7 - 2)x^4 = 5x^4$.
- III Trzecia potęga: $x^3 \cdot 1$ oraz $-2x^2 \cdot 7x$, czyli $(1 - 14)x^3 = -13x^3$. Druga potęga: $-2x^2 \cdot 1$ oraz $1 \cdot x^2$, czyli $(-2 + 1)x^2 = -x^2$. Pierwsza potęga: tylko $1 \cdot 7x = 7x$. Wyraz wolny: $1 \cdot 1 = 1$.
- IV Wynik czytamy z kolejnych kroków:

$$(x^3 - 2x^2 + 1)(x^2 + 7x + 1) = x^5 + 5x^4 - 13x^3 - x^2 + 7x + 1.$$

v Kontrola. Po pierwsze liczymy mnożenia, które weszły do nawiasów: $1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 9$, a trzy składniki razy trzy składniki to dokładnie dziewięć – niczego nie zgubiliśmy. Po drugie podstawiamy $x = 1$ po obu stronach: lewa daje $(1 - 2 + 1)(1 + 7 + 1) = 0$, prawa $1 + 5 - 13 - 1 + 7 + 1 = 0$. Zgadza się. Jedno podstawienie nie daje pewności, ale poważny błąd prawie na pewno by tu wyszedł.

Gdy coś się nie zgadza, taki zapis łatwo naprawić: każdy współczynnik pochodzi z dwóch, trzech mnożeń, które sprawdza się z osobna.

Dzielenie z resztą i podzielność

Dzielenie wielomianów zachowuje się tak samo jak dzielenie liczb całkowitych, a tam jest to szkoła podstawowa: $17 = 3 \cdot 5 + 2$, przy czym reszta 2 **musi** być mniejsza od piątki – inaczej zmieściłaby się jeszcze jedna. To nie przypadek: liczby całkowite i wielomiany należą do tej samej rodziny struktur – *pierścieni euklidesowych* – czyli takich, w których dzielenie z resztą w ogóle działa. Rolę słowa „mniejsza” gra tu stopień.

TWIERDZENIE O DZIELENIU Z RESZTĄ

Dla wielomianów W oraz $Q \neq 0$ istnieje dokładnie jedna para wielomianów P (iloraz) i R (reszta) taka, że

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \deg R < \deg Q.$$

Reszta nie musi mieć stopnia dokładnie o jeden mniejszego: przy dzieleniu przez $x^2 + 1$ może wyjść $3x - 8$, ale równie dobrze 5 albo 0. Reszta zero znaczy, że $W(x)$ **dzieli się** przez $Q(x)$. Istotne jest, że iloraz ma być *wielomianem* – tak jak 15 nie dzieli się przez 2, bo 7,5 nie jest liczbą całkowitą.

Czytanie gotowej tożsamości. Warunek na stopień reszty mówi też, jak czytać zapis, który już mamy:

$$W(x) = (x^2 + 3)(3x + 7) + (x - 2).$$

To dzielenie przez $x^2 + 3$: dzielnik zmieścił się $3x + 7$ razy, a zostało $x - 2$ – zgadza się, bo $1 < 2$. Odwrotnie przeczytać się nie da: gdyby dzielnikiem było $3x + 7$, reszta musiałaby być **liczbą**.

Czynniki nierozkładalne. Liczbę całkowitą rozkładamy na iloczyn liczb pierwszych: $5 \cdot 7 \cdot 11^2$ i dalej już nic. Wielomian rozkładamy na czynniki dwóch rodzajów: **stopnia pierwszego**, jak

$x - 1$, i trójmiany **stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem**, jak $x^2 + 1$. Wielomian

$$W(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 3)^2$$

jest rozłożony do końca; od razu widać, przez co się dzieli, jakie ma miejsca zerowe i jak rozwiązać nierówność z nim. **Postać iloczynowa jest postacią wymarzoną.**

Dlaczego rozkład jest tak cenny. Wymnożyć czynniki potrafi każdy, wrócić do nich – niekoniecznie. Ta sama asymetria rządzi liczbami: pomnożenie dwóch wielkich liczb pierwszych jest natychmiastowe, a odzyskanie ich z iloczynu to zadanie, do którego nie znamy szybkiego sposobu – i na tym opiera się szyfrowanie danych, choćby w bankowości. To okoliczność słynnego pytania **P kontra NP**: czy każdy problem, w którym gotowe rozwiązanie da się szybko sprawdzić, da się też szybko rozwiązać.

Skoro tak, to gdy w rachunkach pojawia się iloczyn, warto się dwa razy zastanowić, zanim się go wymnoży.

W wyrażeniu $(x^2 + 1)(x^2 - 1) + 7x^2(x + 1)$ oba składniki mają wspólny czynnik $x + 1$, bo $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$:

$$(x + 1) \left[(x^2 + 1)(x - 1) + 7x^2 \right].$$

W nawiasie został wielomian stopnia trzeciego zamiast czwartego – i dopiero tam opłaca się mnożyć. To samo z liczbami: wyróżnik $36^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81$ to $4 \cdot 9^2 \cdot (4 - 1)$, więc $\sqrt{\Delta} = 18\sqrt{3}$ bez kalkulatora. Mnożenie jest ostatecznością: gdy za chwilę coś będzie pierwiastkowane albo skracane, duża liczba tylko przeszkadza.

Warunek na stopnie. Dzielną musi mieć stopień co najmniej taki jak dzielnik: $x + 1$ przez $x^2 + 3$ nie podzielimy. Najprostszy przykład znamy z funkcji homograficznej – $x + 1$ przez $x - 7$. Wyprodukujmy dzielnik w liczniku i rozbijmy ułamek tak, jak rozbija się $\frac{5+7}{3} = \frac{5}{3} + \frac{7}{3}$:

$$\frac{x + 1}{x - 7} = \frac{(x - 7) + 8}{x - 7} = 1 + \frac{8}{x - 7}.$$

Po pomnożeniu obu stron przez $x - 7$ zostaje $x + 1 = 1 \cdot (x - 7) + 8$: dzielnik zmieścił się raz, reszta wynosi 8.

DZIELENIE BEZ ALGORYTMU

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 1:22:51

Podzielmy $x^3 + 5x^2 - 7x + 1$ przez $x^2 + 1$, wyłączając dzielnik przed nawias tyle razy, ile się da.

I Czego szukamy: zapisu $(x^2 + 1) \cdot P(x) + R(x)$, gdzie reszta ma stopień mniejszy niż 2. Czyli: wyłączyć $x^2 + 1$ przed nawias, ile się da.

II Zaczynamy od x^3 . Wyłączenie x z nawiasem $x^2 + 1$ daje $x^3 + x$ – o x za dużo, więc poprawiamy resztę wyrażenia:

$$x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = x(x^2 + 1) + 5x^2 - 8x + 1.$$

III Teraz $5x^2$. Wyłączenie 5 daje $5x^2 + 5$, więc nadmiarową piątkę odejmujemy:

$$= x(x^2 + 1) + 5(x^2 + 1) - 8x - 4.$$

W $-8x - 4$ nie ma już x^2 – to jest reszta.

IV Po wyłączeniu wspólnego nawiasu:

$$x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = (x^2 + 1)(x + 5) + (-8x - 4).$$

Ten rachunek to dokładnie to, co robi algorytm dzielenia pisemnego – tylko zapisane bez schematu.

Algorytm dzielenia pisemnego

Algorytm to jeden krok powtarzany do skutku. W każdym kroku dzielimy **najwyższą potęgę tego, co zostało**, przez **najwyższą potęgę dzielnika**, wynik dopisujemy do ilorazu, mnożymy go przez cały dzielnik i odejmujemy od tego, co zostało. Kończymy, gdy to, co zostało, ma stopień mniejszy niż dzielnik – to jest reszta.

DZIELENIE PISEMNE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 1:26:56

Podzielmy $x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ przez $x^2 + 1$. Najwyższa potęga dzielnika to x^2 – przez nią będziemy dzielić w każdym kroku.

- I $x^4 : x^2 = x^2$ – pierwszy wyraz ilorazu. Mnożymy go przez dzielnik, $x^2(x^2 + 1) = x^4 + x^2$, i odejmujemy:

$$(x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 7) - (x^4 + x^2) = -x^3 + x^2 + 2x - 7.$$

Kontrola: x^4 się skasowało. Jeżeli w którymś kroku najwyższa potęga nie znika, gdzieś jest błąd rachunkowy. O tym, co odjęliśmy, można już zapomnieć – to przeszłość.

- II Ten sam krok dla $-x^3 + x^2 + 2x - 7$: $-x^3 : x^2 = -x$, dalej $-x(x^2 + 1) = -x^3 - x$ i odejmowanie:

$$(-x^3 + x^2 + 2x - 7) - (-x^3 - x) = x^2 + 3x - 7.$$

Trzecie potęgi się skasowały.

- III Dla $x^2 + 3x - 7$: $x^2 : x^2 = 1$, dalej $1 \cdot (x^2 + 1) = x^2 + 1$ i odejmowanie:

$$(x^2 + 3x - 7) - (x^2 + 1) = 3x - 8.$$

Zostało $3x - 8$ – stopnia pierwszego, a dzielnik jest stopnia drugiego. $3x$ przez x^2 nie podzielimy, więc algorytm się kończy.

- IV Odczytujemy: iloraz $x^2 - x + 1$ (wyrazy z kroków I–III), reszta $3x - 8$. Czyli

$$x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 7 = (x^2 - x + 1)(x^2 + 1) + (3x - 8).$$

Dzielnik $x^2 + 1$ zmieścił się $x^2 - x + 1$ razy i zostało $3x - 8$ – jak $17 = 3 \cdot 5 + 2$.

Do zapamiętania jest tylko jeden krok; każdy następny wygląda tak samo, a co po odjęciu przestaje być potrzebne, warto przekreślić. Ten algorytm działa dla **dowolnego** dzielnika i dlatego wystarcza zawsze; schemat Hornera, do którego przechodzimy, jest szybszy, ale dzieli tylko przez dwumiany.

Schemat Hornera

Schemat Hornera dzieli wielomian przez dwumian postaci $x - c$: przez $x + 2$, $x - 7$, $x + 10$. Przez $x^2 + 1$ nim nie podzielimy (a przez $2x - 1$ tylko po modyfikacji, w którą nie wchodzimy). W tabelce w górnym wierszu stoją **wszystkie** współczynniki dzielnej, w lewej komórce dolnego

wiersza liczba c , a dalej kolejne wyniki. Pierwszy współczynnik spisujemy bez zmian; każdy następny wynik to **poprzedni wynik razy c plus współczynnik nad nim**. Ostatnia liczba w dolnym wierszu to reszta, pozostałe – współczynniki ilorazu, wielomianu o stopień niższego.

Dwie pułapki, obie na wejściu. Pierwsza: dzielimy przez $x + 2$, czyli przez $x - (-2)$, więc do tabelki wpisujemy $c = -2$, nie 2. Druga: współczynniki ma być o jeden więcej niż stopień; jeżeli w dzielnej brakuje jakiejś potęgi, w górnym wierszu musi stać zero.

Przykład z lekcji (1:34:05): podzielmy $2x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ przez $x + 2$. Pięć współczynników, $c = -2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 5 & -9 & 17 \end{array}$$

Rachunek krok po kroku, zawsze tym samym -2 : dwójkę spisujemy; $-2 \cdot 2 = -4$, $-4 + 1 = -3$; $-2 \cdot (-3) = 6$, $6 + (-1) = 5$; $-2 \cdot 5 = -10$, $-10 + 1 = -9$; $-2 \cdot (-9) = 18$, $18 + (-1) = 17$. Dzieliśmy wielomian stopnia czwartego przez wielomian stopnia pierwszego, więc iloraz jest stopnia trzeciego: $2x^3 - 3x^2 + 5x - 9$; reszta wynosi 17 – liczba, jak być powinno przy dzieleniu przez dwumian. Czyli

$$2x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (2x^3 - 3x^2 + 5x - 9)(x + 2) + 17.$$

Z tego zapisu widać coś ważnego. Podstawmy $x = -2$, czyli miejsce zerowe dzielnika: nawias $x + 2$ daje zero, cały iloczyn daje zero, i zostaje sama reszta. Zatem $W(-2) = 17$ – **wartość wielomianu w miejscu zerowym dzielnika to reszta z dzielenia**. To jest już twierdzenie o reszcie, którym zajmujemy się w następnej sekcji.

Schemat Hornera łatwo zapomnieć, a algorytm dzielenia pisemnego, raz przećwiczony, zostaje na zawsze i działa przy każdym dzielniku. W razie wątpliwości wystarczy ten drugi. Sam William George Horner (1786–1837) był postacią barwniejszą niż jego tabelka: w 1834 roku opisał urządzenie znane dziś jako *zoetrop* – bęben ze szczelinami, przez które ogląda się animację – a w innej publikacji podał przybliżony wzór na wysokość góry z odczytów barometru i temperatury na dole i na szczycie.

Twierdzenie Bézouta i twierdzenie o reszcie

Wystarczy to, co już wiemy o dzieleniu. Podzielmy wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - a$: reszta ma stopień mniejszy niż 1, jest więc liczbą.

$$W(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$$

Podstawmy $x = a$. Nawias $a - a$ jest zerem, iloczyn też – obojętne, ile wynosi $Q(a)$ – i zostaje $W(a) = r$.

TWIERDZENIE O RESZCIE

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$.

Gdy ta reszta jest zerem, zostaje $W(x) = (x - a) Q(x)$, czyli W dzieli się przez $x - a$. Działa to też w drugą stronę.

TWIERDZENIE BÉZOUTA

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$, czyli gdy a jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Oba zdania mówią o tym samym i czyta się je w obie strony. „ $W(3) = 1$ ” znaczy: przy dzieleniu przez $x - 3$ reszta wynosi 1, czyli $W(x) = (x - 3) Q(x) + 1$. „ $W(-1) = 5$ ” znaczy $W(x) = (x + 1) Q(x) + 5$ – dwumianem jest $x - (-1)$. A „ $W(3) = 0$ ” znaczy, że $x - 3$ dzieli $W(x)$; zapisujemy to jak podzielność liczb: $(x - 3) \mid W(x)$. Nic w tym obcego – funkcja kwadratowa o miejscach zerowych 2 i 5 rozpisuje się jako $(x - 2)(x - 5)$, więc dzieli się przez $x - 2$ i przez $x - 5$.

Pytanie o podzielność sprowadza się dzięki temu do **jednego podstawienia** – i to jest cała sztuczka. Nawet gdy wielomian straszy potęgami, jak $x^{2019} - 3x^{2000} + 2x + 6$, pytanie o dzielenie przez $x - 1$ i $x + 1$ to tylko $W(1)$ i $W(-1)$, a jedynkę i minus jedynkę potęguje się bez wysiłku: $W(1) = 1 - 3 + 2 + 6 = 6$ oraz $W(-1) = -1 - 3 - 2 + 6 = 0$.

Najtrudniejsze zadanie z wielomianów

Poziom wykonania 19% – najniższy wśród zadań z wielomianów od 2015 roku – a zadanie składa się w całości z tego, co stoi wyżej w tym rozdziale.

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu

$$W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3.

Oblicz współczynniki a , b i c . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

Na co zwrócić uwagę. Treść podpowiada dwa razy. „Wszystkich *czterech*” współczynników – bo współczynnikami są 1, a , b , c , a nie tylko a , b , c ; jedynka przy x^3 liczy się do sumy. I „rozważ wszystkie przypadki” – bo będą trzy.

Suma współczynników równa 0 to $W(1) = 0$: jedynka jest pierwiastkiem, więc z twierdzenia Bézouta $x - 1$ dzieli $W(x)$. Trzy pierwiastki tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3, a jeden z nich to 1. Jedynka może być w tym ciągu pierwsza, środkowa albo ostatnia:

$$(1, 4, 7), \quad (-2, 1, 4), \quad (-5, -2, 1).$$

W każdym przypadku znamy trzy pierwiastki wielomianu stopnia trzeciego o współczynniku wiodącym 1, więc – tak jak w postaci iloczynowej funkcji kwadratowej – wielomian jest iloczynem trzech czynników:

$$W_1(x) = (x - 1)(x - 4)(x - 7),$$

$$W_2(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4),$$

$$W_3(x) = (x + 5)(x + 2)(x - 1).$$

Pytają o a , b , c , a nie o wzór wielomianu, więc trzeba wymnożyć – potęga po potęgę. W pierwszym przypadku $(x - 4)(x - 7) = x^2 - 11x + 28$, a dalej

$$W_1(x) = (x^2 - 11x + 28)(x - 1) = x^3 - 12x^2 + 39x - 28,$$

czyli $a = -12$, $b = 39$, $c = -28$. Tak samo $W_2(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ oraz $W_3(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ – razem trzy odpowiedzi.

Reszta z dzielenia przez wielomian stopnia drugiego

Typowe zadanie: o wielomianie $W(x)$ wiemy tylko tyle, ile wynoszą dwie jego wartości, a pytanie brzmi, jaka jest reszta z dzielenia przez wielomian stopnia drugiego. Wzoru W nie poznamy

nigdy, ale reszta wyjdzie zawsze ta sama, bo jest stopnia mniejszego niż 2: $R(x) = ax + b$. Dwie niewiadome, więc potrzebne są dwa równania – dostajemy je, podstawiając **miejsca zerowe dzielnika**, bo wtedy iloczyn z $Q(x)$ znika.

RESZTA

PRZYKŁAD Z LEKCJI • 2:08:45

O wielomianie $W(x)$ wiadomo, że $W(2) = 3$, a reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x + 2$ wynosi -1 . Jaka jest reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x^2 - 4$?

I Tłumaczymy treść na wartości. „Reszta z dzielenia przez $x + 2$ wynosi -1 ” to $W(-2) = -1$; równie dobrze pierwszą informację można było podać jako „reszta z dzielenia przez $x - 2$ wynosi 3”.

II Zapisujemy dzielenie z nieznanym ilorazem i resztą stopnia mniejszego niż 2:

$$W(x) = (x^2 - 4) \cdot Q(x) + ax + b.$$

III Podstawiamy miejsca zerowe dzielnika. Dla $x = 2$ nawias $x^2 - 4$ znika i $W(2) = 2a + b$; dla $x = -2$ tak samo $W(-2) = -2a + b$. Z treści:

$$2a + b = 3,$$

$$-2a + b = -1.$$

Dodanie stronami daje $2b = 2$, czyli $b = 1$, a wtedy $a = 1$.

IV Reszta wynosi $R(x) = x + 1$. Dane są dobrane tak, żeby dało się to zrobić: 2 i -2 to miejsca zerowe dzielnika. O reszcie z dzielenia przez $x^2 - 16$ te same dane nic by nie powiedziały.

RESZTA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:14:32

Jaka jest reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \dots + 2x^2 + x$ przez $x^2 - 1$?

- I Dzielenia pisemnego nikt tu nie wykona. Ale $W(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$, a miejsca zerowe dzielnika to 1 i -1 , więc $W(1) = a + b$ oraz $W(-1) = -a + b$.
- II $W(1)$ to suma współczynników: $100 + 99 + \dots + 2 + 1$. Suma ciągu arytmetycznego: pierwszy plus ostatni, na pół, razy liczba wyrazów:

$$W(1) = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

- III Przy $x = -1$ parzyste potęgi zostają z plusem, nieparzyste dostają minus: $W(-1) = 100 - 99 + 98 - 97 + \dots + 2 - 1$. Zamiast osobno sumować parzyste i nieparzyste, łączymy sąsiadów w pary: $(100 - 99) + (98 - 97) + \dots + (2 - 1)$. Sto składników to 50 par, każda równa 1, więc $W(-1) = 50$.
- IV Układ równań $a + b = 5050$, $-a + b = 50$ daje $2b = 5100$, czyli $b = 2550$, oraz $a = 2500$. Reszta: $R(x) = 2500x + 2550$. Nic tu nie wykracza poza program – zadanie łączy tylko dwa działy, wielomiany i ciągi, a takie właśnie zadania sprawiają najwięcej kłopotów.

Rozkład na czynniki i równania wielomianowe

Równanie $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$ nie ma wzoru na rozwiązanie, którym dałoby się posłużyć w szkole. Szkolna metoda to **zgadnięcie pierwiastka**: jeżeli wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on **dzielnikiem wyrazu wolnego**. Kandydatów jest więc niewielu – tu ± 1 i ± 5 – i sprawdzamy ich od najprostszych. Zgadnięty pierwiastek daje z twierdzenia Bézouta czynnik, a po jego wyłączeniu zostaje wielomian o stopień niższy; przy stopniu trzecim jest to trójmian kwadratowy, z którym radzi sobie wyróżnik.

Metoda nie jest nowa – przy funkcji kwadratowej robiliśmy to samo. W $x^2 + 8x - 9$ jedynka jest pierwiastkiem, bo $1 + 8 - 9 = 0$, a drugiego nie trzeba liczyć z wyróżnika: ze wzorów Viète'a iloczyn pierwiastków wynosi $\frac{c}{a} = -9$, więc drugim jest -9 . Stąd

$$x^2 + 8x - 9 = (x - 1)(x + 9),$$

a z postaci iloczynowej wszystko widać od ręki: miejsca zerowe 1 i -9 , pierwsza współrzędna wierzchołka jako ich średnia, $p = \frac{1+(-9)}{2} = -4$, i druga jako wartość w tym punkcie, $q =$

$f(-4) = -25$. Gdy $\Delta < 0$, postaci iloczynowej nie ma – trójmian jest wtedy cegiełką, której w liczbach rzeczywistych rozłożyć się nie da.

RÓWNANIE

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:22:46

Rozwiążmy równanie $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$ i rozłóżmy lewą stronę na czynniki.

- I** Zgadujemy. Dzielniki wyrazu wolnego to $\pm 1, \pm 5$; dla $x = 1$ mamy $1 + 4 - 5 = 0$. Niech $W(x) = x^3 + 4x^2 - 5$; skoro $W(1) = 0$, to $x - 1$ dzieli $W(x)$.
- II** Wyłączamy $x - 1$ bez dzielenia, przekształcając wzór tak, żeby czynnik sam się pokazał. Obok x^3 potrzebujemy $-x^2$, żeby wyszło $x^2(x - 1)$; mamy $+4x^2$, więc rozbijamy je na $-x^2 + 5x^2$:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - 5 &= x^3 - x^2 + 5x^2 - 5 \\ &= x^2(x - 1) + 5(x^2 - 1) \\ &= x^2(x - 1) + 5(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + 5x + 5). \end{aligned}$$

Musiało się udać: oba składniki po rozbiciu zerują się w jedynce, więc z każdego wychodzi $x - 1$. Ten sam wynik dałby schemat Hornera albo dzielenie pisemne.

- III** Trójmian $x^2 + 5x + 5$: $\Delta = 25 - 20 = 5$, więc $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Równanie ma trzy rozwiązania: $1, \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}$.
- IV** Postać iloczynowa, z minusami wciągniętymi do nawiasów:

$$x^3 + 4x^2 - 5 = (x - 1) \left(x + \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(x + \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Niepozorny wielomian, a rozkłada się dość skomplikowanie – to normalne.

Czasem nie ma czego zgadywać, bo wielomian nie ma miejsc zerowych, a rozłożyć go trzeba. Wtedy działa albo teoria, albo wzory skróconego mnożenia – oba sposoby na jednym przykładzie.

ROZKŁAD

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:29:56

Rozłóżmy $x^4 + 1$ na czynniki.

I Co przewidujemy. $x^4 + 1 \geq 1 > 0$, więc miejsc zerowych nie ma i czynniki stopnia pierwszego odpadają. Wielomian stopnia czwartego musi się więc rozłożyć na dwa trójmiany kwadratowe z ujemnymi wyróżnikami. Spróbujmy $x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$ – jedynki na końcach to założenie na wyczucie (mogłoby być 2 i $\frac{1}{2}$), ale bez niego rachunki by nas zakopały.

II Prawą stronę mnożymy potęgą po potędzie:

$$x^4 + (a + b)x^3 + (2 + ab)x^2 + (a + b)x + 1.$$

Ma to być równe $x^4 + 1$, więc współczynniki przy x^3 , x^2 i x są zerami: $a + b = 0$ oraz $ab + 2 = 0$. Z pierwszego $b = -a$, z drugiego $-a^2 + 2 = 0$, czyli $a = \pm\sqrt{2}$ i $b = \mp\sqrt{2}$. Obie możliwości dają ten sam iloczyn:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Wyróżniki obu trójmianów wynoszą $2 - 4 < 0$ – zgodnie z przewidywaniem.

III Sposób drugi, na pomysł. $x^4 + 1$ przypomina kwadrat sumy bez środkowego wyrazu: $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$, więc $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2$. Gdyby odjemnik był kwadratem, mielibyśmy różnicę kwadratów – i jest: $2x^2 = (\sqrt{2}x)^2$. Stąd

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x), \end{aligned}$$

to samo, co wyżej. Wzory skróconego mnożenia będą przy wielomianach wyskakiwać nieustannie.

TWIERDZENIE O ROZKŁADZIE NA CZYNNIKI

Każdy wielomian rozkłada się na iloczyn czynników stopnia pierwszego i czynników stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem. Funkcja kwadratowa jest tego najprostszym przykładem: przy $\Delta \geq 0$ to dwie cegiełki stopnia pierwszego, przy $\Delta < 0$ – jedna cegiełka stopnia drugiego.

Tego twierdzenia nie ma już w programie, ale to ono stoi za przewidywaniem z ostatniego

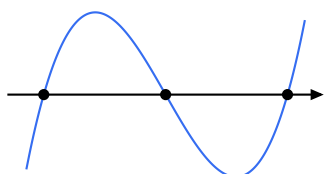
przykładu; niepozorny wielomian bywa przy tym potworem (przykład w dodatku).

Nierówności wielomianowe

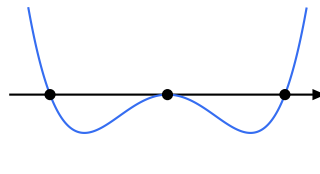
Nierówność wielomianową rozwiązuje się tak samo jak kwadratową: znajdujemy miejsca zerowe, szkicujemy wykres i odczytujemy z niego odpowiedź. Warunek wstępny jest jeden – wielomian musi stać w **postaci iloczynowej**; dopiero z niej widać miejsca zerowe i ich krotności.

SZKIC ZNAKU WIELOMIANU

1. Zaznacz na osi wszystkie miejsca zerowe.
2. Zaczynij rysować z **prawej strony**: od góry, gdy dla dużych x wielomian jest dodatni, od dołu – gdy ujemny (decyduje znak współczynnika wiodącego).
3. W każdym miejscu zerowym **nieparzystej** krotności wykres przechodzi przez oś, a w miejscu **parzystej** krotności odbija się od niej.



jednokrotne: przeplatanka



parzystokrotny: odbicie

Reguła z punktu trzeciego nie jest zaklęciem: czynnik $(x + 3)^4$ jest kwadratem, więc nigdy nie jest ujemny – w -3 się zeruje, ale znaku całego iloczynu zmienić nie może. Czynnik nieparzystego stopnia znak zmienia. Podobnie trójmian z **ujemnym wyróżnikiem** jest stale dodatni, więc można przez niego podzielić obie strony i zapomnieć o nim – miejsc zerowych nie wnosi.

KROTNOŚCI

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 2:42:29

Rozwiążmy $(x - 1)^5 (x + 3)^4 (x + 2)^{13} (x^2 + x + 1) \leq 0$.

- I Miejsca zerowe i krotności: 1 jest pięciokrotne, -3 czterokrotne, -2 trzynastokrotne. Trójmian $x^2 + x + 1$ ma $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, więc jest stale dodatni i nie wnosi nic – można przez niego podzielić obie strony.
- II Dla dużych x wszystkie czynniki są dodatnie, więc rysujemy **z prawej od góry**. Idąc w lewo: przez 1 (krotność 5, nieparzysta) przechodzimy, przez -2 (krotność 13) też, a od -3 (krotność 4, parzysta) się *odbijamy*.
- III Wielomian jest ujemny na $(-2, 1)$ i zeruje się w -3 , -2 oraz 1. Ponieważ nierówność jest nieostra, punkt -3 wchodzi do odpowiedzi jako punkt osobny:

$$x \in \{-3\} \cup \langle -2, 1 \rangle.$$

Jedno miejsce zerowe potrafi siedzieć w **dwóch** czynnikach naraz – wtedy krotności się **dodają**. W nierówności $(x - 2)^5 (2x + 3)^{10} (4 - 2x)^3 x^{117} < 0$ dwójka zeruje zarówno $x - 2$, jak i $4 - 2x$, więc jej krotność wynosi $5 + 3 = 8$ – jest parzysta i wykres się od niej odbija, a nie przez nią przechodzi. (Odpowiedź: $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$.)

Na maturze zadanie z nierównością wielomianową wygląda zwykle tak: najpierw trzeba wyznaczyć parametr, potem rozłożyć wielomian i dopiero na końcu odczytać odpowiedź ze szkicu.

MAJ 2019 · ZADANIE NR 13

POZIOM WYKONANIA 44%

W FILMIE 2:52:40

6 PKT

Wielomian określony wzorem

$$W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$$

jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6.

Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność

$$W(x) \leq 0.$$

Na co zwrócić uwagę. Obie informacje z treści to dwie wartości: podzielność przez $x - 2$ znaczy $W(2) = 0$, a reszta 6 z dzielenia przez $x + 1$ znaczy $W(-1) = 6$. Po podstawieniu wychodzi układ

$$4m^3 - 4m = 0, \quad m^3 - 4m + 9 = 6,$$

a z pierwszego równania $4m(m^2 - 1) = 0$ dostajemy kandydatów 0, 1, -1; drugie spełnia tylko $m = 1$.

I teraz rzecz, którą łatwo przeoczyć: **pierwiastek do dalszej części zadania już znamy**. Skoro $W(2) = 0$, to nie ma czego zgadywać – wielomian $W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ dzielimy przez $x - 2$ (pisemnie albo Hornerem) i zostaje $2x^2 + 7x + 3$. Jego pierwiastki można odgadnąć: -3 pasuje, a drugi czytamy z iloczynu $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, więc jest nim $-\frac{1}{2}$. Stąd $W(x) = (x - 2)(x + 3)(2x + 1)$, trzy pierwiastki jednokrotne, wykres z prawej od góry, przeplatanka – i odpowiedź $x \in (-\infty, -3) \cup \langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle$.

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Zgadywanie pierwiastka wśród dzielników wyrazu wolnego nie było zgadywaniem na ślepo – stoi za nim twierdzenie.

TWIERDZENIE O PIERWIASTKACH WYMIERNYCH

Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ma **współczynniki całkowite**, to każdy jego pierwiastek wymierny jest postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a q – dzielnikiem współczynnika wiodącego a_n .

W szkolnej wersji mówi się tylko o pierwiastkach **całkowitych**: wtedy $q = 1$ i kandydatami są same dzielniki wyrazu wolnego. Dla $W(x) = 2x^5 - 3x^2 + 257x - 9$ dzielniki -9 to $\pm 1, \pm 3, \pm 9$, a dzielniki 2 to $\pm 1, \pm 2$, więc pierwiastkiem wymiernym może być tylko

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}.$$

Twierdzenie mówi, kto *może* być pierwiastkiem – nie, że ktoś nim *jest*. Wielomian $x^2 + 2^{100}$ ma 202 kandydatów i ani jednego pierwiastka, bo $x^2 + 2^{100} > 0$ dla każdego x .

Współczynniki wymierne też nie przeszkadzają: wystarczy pomnożyć obie strony równania przez wspólny mianownik. Równanie $\frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} = 0$ po pomnożeniu przez 6 staje się $2x^5 - 3x + 1 = 0$, gdzie kandydatami są ± 1 i $\pm \frac{1}{2}$ (pierwiastkiem jest 1).

Tym twierdzeniem dowodzi się niewymierności pierwiastków. Liczba $\sqrt[3]{2}$ spełnia równanie $x^3 - 2 = 0$, którego jedynymi kandydatami na pierwiastek wymierny są ± 1 i ± 2 – a żadna z tych liczb go nie spełnia. Skoro równanie ma rozwiązanie rzeczywiste, a nie ma wymiernego, to $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierny. Tak samo dla pierwiastka dowolnego stopnia.

Dowodzenie nierówności pochodną

Nierówność wielomianową „prawdziwą dla każdego x ” dowodzi się zwykle wzorami skróconego mnożenia – trzeba tylko wpaść na właściwy pomysł. Gdy pomysłu nie ma, jest droga pewna, choć dłuższa: pokazać, że **wartość najmniejsza** lewej strony jest dodatnia. Wskazuje ją pochodna.

ZNAK POCHODNEJ A MONOTONICZNOŚĆ

Tam, gdzie $f'(x) > 0$, funkcja f rośnie; tam, gdzie $f'(x) < 0$ – maleje. Pochodną wielomianu liczymy wyraz po wyrazie: $(x^n)' = nx^{n-1}$, a pochodna liczby jest zerem.

DOWÓD

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 3:21:19

Wykażmy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$.

I Niech $f(x) = x^4 - x^2 - 2x + 3$. Pochodna:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x - 2 = 2(2x^3 - x - 1).$$

II Znak pochodnej zależy od nawiasu, więc rozkładamy go na czynniki. Kandydatami na pierwiastek są dzielniki -1 , a $x = 1$ pasuje: $2 - 1 - 1 = 0$. Z twierdzenia Bézouta wychodzi $x - 1$:

$$\begin{aligned} 2x^3 - x - 1 &= 2x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1 \\ &= (x - 1)(2x^2 + 2x + 1). \end{aligned}$$

III Trójkąt $2x^2 + 2x + 1$ ma $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ i ramiona w górę, więc jest stale dodatni – o znaku pochodnej decyduje sam $x - 1$. Zatem $f'(x) < 0$ dla $x < 1$ i $f'(x) > 0$ dla $x > 1$: funkcja maleje, a potem rośnie, więc w $x = 1$ ma **wartość najmniejszą**.

IV Zostało ją policzyć: $f(1) = 1 - 1 - 2 + 3 = 1$. Skoro najmniejsza wartość wynosi 1, to $f(x) \geq 1 > 0$ dla każdego x , co kończy dowód.

Nierówności wymierne

Funkcja wymierna to iloraz wielomianów, więc każda nierówność wymierna i tak sprowadza się do wielomianowej. Dochodzą tylko dwie rzeczy, na których najłatwiej stracić punkty.

Założenia – mianownik nie może się zerować, i te wykluczone liczby trzeba potem wyciąć z odpowiedzi, choćby nierówność wielomianowa je dopuszczała.

Mnożenie stronami – wolno mnożyć tylko przez wyrażenie o **stałym znaku**. Przez x^3 nie wolno, bo zmienia znak; przez x^4 wolno, bo przy założeniu $x \neq 0$ jest ono stale dodatnie.

Zamiast mnożyć przez kwadrat mianownika często wygodniej przenieść wszystko na jedną stronę, sprowadzić do wspólnego mianownika i skorzystać z tego, że **znak ilorazu jest taki sam jak znak iloczynu**: nierówność $\frac{L(x)}{M(x)} \leq 0$ znaczy dokładnie tyle, co $L(x) \cdot M(x) \leq 0$ przy $M(x) \neq 0$.

NIERÓWNOŚĆ WYMIERNA

PRZYKŁAD Z LEKCJI · 3:32:11

Rozwiążmy $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \leq 1$.

- I Założenie: $x \neq 0$. Mnożymy obie strony przez x^4 – przy tym założeniu jest ono stale dodatnie, więc zwrot nierówności zostaje:

$$2x^3 - x \leq x^4, \quad \text{czyli} \quad x^4 - 2x^3 + x \geq 0.$$

- II Rozkładamy. Najpierw x przed nawias, potem w nawiasie zgadujemy pierwiastek 1 i wyłączamy $x - 1$:

$$x^4 - 2x^3 + x = x(x^3 - 2x^2 + 1) = x(x - 1)(x^2 - x - 1).$$

Trójmian $x^2 - x - 1$ ma $\Delta = 5$ i pierwiastki $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- III Cztery pierwiastki jednokrotne: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62$, 0 , 1 , $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$. Współczynnik wiodący jest dodatni, więc rysujemy z prawej od góry i przeplatamy.
- IV Wielomian jest nieujemny na trzech kawałkach, ale 0 jest poza dziedziną, więc wypada z odpowiedzi:

$$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup (0, 1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

Rozwiąż nierówność

$$\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}.$$

Na co zwrócić uwagę. Założenia: $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq -\frac{3}{2}$. Mnożenie przez kwadraty mianowników to droga przez mękę – lepiej przenieść wszystko na lewo i odjąć ułamki jak w podstawówce, bo mianownik od razu wychodzi w postaci iloczynowej:

$$\frac{(3x+1)(2x+3) - (2x+1)(3x+4)}{(2x+1)(2x+3)} \leq 0.$$

W liczniku $6x^2 + 11x + 3 - (6x^2 + 11x + 4) = -1$ – wszystko się kasuje. Zostaje $\frac{-1}{(2x+1)(2x+3)} \leq 0$, czyli $(2x+1)(2x+3) > 0$, a stąd $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$. Nierówność wyszła **ostra**, bo licznik nigdy nie jest zerem – i to samo mówią założenia.

2

Ćwiczenia

1 Dla każdego wielomianu podaj stopień, współczynnik wiodący i wyraz wolny, a potem wypisz wszystkie współczynniki, od najwyższej potęgi do wyrazu wolnego.

a) $W(x) = 3x^4 - x^2 + 2x - 8$

b) $W(x) = x^5 + x$

c) $W(x) = 7 - 2x^3$

d) $W(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

e) $W(x) = (1 - 2x)^3$

f) $W(x) = 5$

2 Nie rysując wykresu, podaj, dokąd zmierza on przy $x \rightarrow -\infty$ oraz $x \rightarrow +\infty$, a także ile najwyżej może mieć miejsc zerowych i zakrętów.

a) $W(x) = 2x^5 - x^2 + 3$

b) $W(x) = -x^4 + 7x^3$

c) $W(x) = 7 - 2x^3$

d) $W(x) = (x - 1)^4(x + 2)^3$

e) $W(x) = -(x^2 + 1)(x^2 - 4)$

f) $W(x) = x^2(x^2 + 3)^2$

3 Oblicz sumę wszystkich współczynników wielomianu, nie wymnażając nawiasów.

a) $W(x) = (2x - 3)^5$

b) $W(x) = (x^2 - x - 1)^{10}$

c) $W(x) = (3x - 2)^4(x + 1)^3$

d) $W(x) = (x^2 + x + 1)^{2026} - (x + 2)^3$

e) $W(x) = (1 - x)^7(2x - 1)^5$

f) $W(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)(x^2 + 7x + 1)$

4 Wyznacz stopień wielomianu, nie wymnażając nawiasów w całości.

a) $W(x) = (x^2 + 1)^3(x - 2)^2$

b) $W(x) = (x^3 + x)(x^3 - x) - x^6$

c) $W(x) = (x + 1)^4 - (x - 1)^4$

d) $W(x) = (2x^3 - 1)^2 - 4x^6$

e) $W(x) = x(x + 1)(x + 2) \cdot \dots \cdot (x + 9)$

f) $W(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) - x^4$

5 Wymnóż, zbierając wyrazy potęga po potędze. Sprawdź wynik, podstawiając $x = 1$ po obu stronach.

a) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 2x - 5)$

c) $(x^3 - x + 2)(x^3 + x - 2)$

b) $(2x^3 + x - 4)(x^2 - x + 3)$

d) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

6 Oblicz $\sqrt{\Delta}$ bez kalkulatora: wyróżnika nie wymnażaj, tylko rozłóż go na czynniki. Wzorem niech będzie trójmian $x^2 + 36x + 81$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 36^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81 = 81 \cdot 16 - 4 \cdot 81 \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 81 - 4 \cdot 81 = 4 \cdot 81(4 - 1) = 4 \cdot 81 \cdot 3,\end{aligned}$$

a stąd $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 9\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

a) $x^2 - 12x + 6$

d) $3x^2 - 18x + 6$

b) $2x^2 + 20x + 8$

e) $x^2 + 50x + 125$

c) $x^2 + 24x + 12$

f) $4x^2 - 20x + 9$

7 Wykonaj dzielenie z resztą algorytmem pisemnym. Wynik zapisz w postaci $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

a) $(x^3 + 2x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$

d) $(x^5 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$

b) $(2x^4 - 3x^3 + x - 5) : (x^2 + 1)$

e) $(3x^3 - x^2 + 2) : (x^2 - x - 1)$

c) $(x^4 - 1) : (x^2 + x + 1)$

f) $(x^4 + 2x^3 - x - 2) : (x + 2)$

8 Schematem Hornera podziel wielomian przez dwumian. Podaj iloraz i resztę.

a) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$

d) $(3x^3 + 2x^2 - 5) : (x + 2)$

b) $(2x^4 - x^3 + 3x - 1) : (x + 1)$

e) $(x^4 - 3x^2 + 2x - 7) : (x - 3)$

c) $(x^5 - 1) : (x - 1)$

f) $(4x^3 - 2x + 1) : (x - \frac{1}{2})$

9 Nie wykonując dzielenia, oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez podany dwumian i rozstrzygnij, czy W jest przez niego podzielny.

- a) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 2x + 1$, dwumian $x - 1$ d) $W(x) = x^6 - 64$, dwumian $x - 2$
 b) $W(x) = x^3 + 27$, dwumian $x + 3$ e) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, dwumian $x - 2$
 c) $W(x) = 2x^{100} - x^{50} + x - 2$, dwumian $x + 1$ f) $W(x) = (x - 1)^{2026} + (x + 1)^{2026}$, dwumian $x - 1$

10 Wyznacz wartości parametrów.

- a) Wielomian $W(x) = x^3 + px^2 - 2x + 6$ jest podzielny przez $x + 2$.
 b) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^4 - x^2 + ax + 1$ przez $x - 1$ jest równa 5.
 c) Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez $x - 1$ i przez $x + 2$.
 d) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + ax + b$ przez $x - 1$ jest równa 2, a reszta z dzielenia przez $x + 1$ jest równa 4.
 e) Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 - 5)x - 2$.
 f) Pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ są liczby -1 , 2 i 3 .
 g) Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ przez $x - 2$ jest trójmian $ax^2 + bx + c$. Wyznacz a , b , c bez wykonywania dzielenia.

11 Wyznacz resztę z dzielenia.

- a) Wielomianu W przez $x^2 - 1$, jeśli $W(1) = 4$ oraz $W(-1) = -2$.
 b) Wielomianu W przez $(x - 3)(x + 1)$, jeśli reszta z dzielenia W przez $x - 3$ jest równa 5, a przez $x + 1$ jest równa -3 .
 c) Wielomianu $W(x) = x^{50} + x^{25} + x^5 + 1$ przez $x^2 - 1$.
 d) Wielomianu $W(x) = x^{2026}$ przez $x^2 - x$.
 e) Wielomianu $W(x) = x^{100}$ przez $x^2 - 3x + 2$.

12 Zapisz trójmian w postaci iloczynowej: zgadnij jeden pierwiastek, a drugi wyznacz ze wzorów Viète'a, bez liczenia wyróżnika.

- a) $x^2 - 5x + 6$ c) $2x^2 - 7x + 3$
 b) $x^2 + 3x - 10$ d) $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$

13 Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne i podaj wszystkie jego pierwiastki. Zaczynij od zgadnięcia pierwiastka wśród dzielników wyrazu wolnego.

a) $x^3 - 7x + 6$

e) $x^3 - x^2 - 4$

b) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

f) $x^4 - 5x^2 + 4$

c) $x^3 - 3x^2 + 4$

g) $x^4 + x^3 - x - 1$

d) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

h) $x^4 - 2x^3 - x + 2$

14 Rozwiąż równanie.

a) $x^3 = 4x$

e) $(x^2 - 1)(x^2 + 3x + 2) = 0$

b) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

f) $x^3 + 8 = 0$

c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

g) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

h) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

15 Rozwiąż nierówność. Zwróć uwagę na krotności miejsc zerowych.

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 4) > 0$

d) $(x^2 + 4)(x - 2)(x + 5) < 0$

b) $x(x - 3)^2(x + 1) \leq 0$

e) $(2 - x)(x + 1)^5 \geq 0$

c) $(x + 2)^3(x - 1)^4(x - 3) \geq 0$

f) $(x - 1)^2(3 - x)(x + 2)^3 > 0$

16 Rozwiąż nierówność wymierną. Zaczynij od założeń.

a) $\frac{x - 1}{x + 2} \geq 0$

c) $\frac{x + 3}{x - 1} < 1$

b) $\frac{1}{x} \leq 2$

d) $\frac{2}{x - 1} \geq \frac{1}{x + 2}$

Dodatek

Ciekawostki z pierwszej części filmu

Pięć rzeczy, których nikt na maturze nie wymaga – ale które pokazują, po co wielomiany w ogóle są.

Wielomian, który udaje sinusa. Za pomocą wielomianów przybliża się funkcje znacznie bardziej skomplikowane. Wielomian Taylora sinusa to

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

i im więcej wyrazów weźmiemy, tym lepiej przybliżenie pokrywa się z sinusem – na coraz dłuższym odcinku. Trzy wyrazy dla jednego radiana (około 60°) dają

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} = 0,8416\dots,$$

a kalkulator pokazuje $\sin 1 = 0,8414\dots$ – trzy miejsca po przecinku się zgadzają. Tak (między innymi) liczone sinusy i logarytmy, zanim były kalkulatory, i tak je zaprogramowano.

Styczna jako wielomian stopnia pierwszego. Najprostsze przybliżenie wielomianem to styczna do wykresu: przy dużym powiększeniu w pobliżu punktu styczności krzywa i prosta są nie do odróżnienia – tak jak płaszczyzna styczna do sfery, na której „żyjemy”. Styczna nie musi mieć z wykresem jednego punktu wspólnego: styczna do wykresu wielomianu stopnia trzeciego może go przeciąć w drugim punkcie, a prosta $y = 1$ jest styczna do sinusoidy w nieskończenie wielu punktach.

Wzory, których nie ma. Równanie stopnia trzeciego $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ma wzory na rozwiązania – koszmarnie długie, zbudowane z a, b, c, d , działań i pierwiastków. Równanie stopnia czwartego też, jeszcze dłuższe. Od stopnia piątego takich wzorów **nie ma** i mieć nie może – to twierdzenie Abela–Ruffiniego. Nie chodzi o to, że ich nie znaleziono: dla równania $x^5 - x + 1 = 0$ da się udowodnić, że jego rozwiązania nie zapisuje żadne wyrażenie ze współczynników, działań i pierwiastków. Dlatego szkolna metoda to zgadywanie pierwiastka, a losowy wielomian stopnia większego niż 4 rozkłada się tylko w przybliżeniu.

Wielomian nieparzystego stopnia zawsze ma pierwiastek. Dla bardzo dużych x o znaku $W(x)$ decyduje najwyższa potęga: $x^5 - x + 1$ jest dla dużych dodatnich x dodatni, a dla dużych ujemnych – ujemny. Wielomian jest funkcją ciągłą, więc gdzieś po drodze musi przeciąć oś Ox (to własność Darboux, którą omawiamy przy granicach i pochodnych). Przy parzystym

stopniu gwarancji nie ma: $x^4 + 1$ nie zeruje się nigdy. Wielomian $x^5 - x + 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty – to zadanie 19 poniżej.

Niepozorny potwór. Wielomian $W(x) = x^4 + 4x + 5$ nie ma miejsc zerowych (jest wszędzie dodatni), więc rozkłada się na dwa trójmiany z ujemnymi wyróżnikami. Da się je znaleźć szkolnymi narzędziami, ale wyglądają tak:

$$W(x) = \left(x^2 + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}x + 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 2} \right) \cdot \left(x^2 - \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}x + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 2} \right).$$

Wielomiany są jak grzyby: wyglądają niepozornie, a niektóre są potworne. Na maturze do rozłożenia trafia się tylko taki, który rozkłada się w skończonym czasie.

Ponad program: krotność i nierozkładalność

Ostatnia część filmu jest w całości dla ciekawych. Oba narzędzia wykraczają poza maturę, ale oba potrafią oszczędzić sporo pracy.

Pierwiastki wielokrotne wykrywa pochodna. Weźmy $W(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$: jedynka jest pierwiastkiem dwukrotnym i rzeczywiście zeruje się nie tylko W , ale i $W'(x) = 2x - 2$. To nie przypadek – jeżeli $W(x) = (x - a)^2 Q(x)$, to ze wzoru na pochodną iloczynu

$$W'(x) = 2(x - a)Q(x) + (x - a)^2 Q'(x),$$

a oba składniki zerują się w a .

KRYTERIUM KROTNOŚCI

Liczba a jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W dokładnie wtedy, gdy zerują się w niej kolejno $W, W', W'', \dots, W^{(k-1)}$, a $W^{(k)}(a) \neq 0$.

Praktyczny pożytek: gdy wielomian stopnia piątego zeruje się w 1 i jego pochodna też, to dzieli się nie tylko przez $x - 1$, ale przez $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Można więc od razu podzielić przez trójmian i jednym dzieleniem zejść do stopnia trzeciego, zamiast dzielić dwa razy i dwa razy zgadywać ten sam pierwiastek.

Kiedy rozkład jest niemożliwy. Czasem opłaca się wiedzieć, że wielomianu *nie da się* rozłożyć – zanim straci się godzinę na próby.

KRYTERIUM EISENSTEINA

Jeżeli dla wielomianu $W(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ o współczynnikach całkowitych istnieje

liczba pierwsza p taka, że p nie dzieli a_n , dzieli wszystkie pozostałe współczynniki, a p^2 nie dzieli wyrazu wolnego a_0 , to W jest nierozkładalny w liczbach wymiernych.

Dla $W(x) = x^4 + 15x - 5$ weźmy $p = 5$: piątka nie dzieli współczynnika wiodącego 1, dzieli 0, 0, 15 i -5 , a 25 nie dzieli -5 . Wielomian nie rozkłada się więc na iloczyn dwóch trójmianów o współczynnikach wymiernych, a tym bardziej nie ma pierwiastków wymiernych – kandydatów ± 1 i ± 5 nie trzeba nawet sprawdzać. Tak samo $x^{11} - 11$ przy $p = 11$, skąd od razu wynika, że $\sqrt[11]{11}$ jest liczbą niewymierną.

Na koniec trzy zadania z gwiazdką – do dwóch ostatnich przydadzą się ciekawostki z tego rozdziału.

17 ★ Rozłóż wielomian na iloczyn dwóch trójmianów kwadratowych.

a) $x^4 + 4$

c) $x^4 - 6x^2 + 1$

b) $x^4 + x^2 + 1$

d) $x^4 + 4x^2 + 16$

18 ★ Dany jest wielomian $W(x) = (2x - 1)^{10}$. Oblicz sumę jego współczynników przy parzystych potęgach x oraz sumę współczynników przy nieparzystych potęgach x .

19 ★ Wykaż, że wielomian $W(x) = x^5 - x + 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty, i wskaż przedział o długości 1 o końcach całkowitych, w którym ten pierwiastek leży.

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Do każdego zadania wynik i szkic rozwiązania: sam klucz, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 ODP. a) stopień 4, wiodący 3, wolny -8 ; współczynniki 3, 0, -1 , 2, -8 . b) 5, 1, 0; 1, 0, 0, 0, 1, 0. c) 3, -2 , 7; -2 , 0, 0, 7. d) 3, 1, 6; 1, -2 , -5 , 6. e) 3, -8 , 1; -8 , 12, -6 , 1. f) 0, 5, 5; jeden współczynnik: 5.

SZKIC Brakująca potęga to współczynnik 0, więc współczynników jest zawsze o jeden więcej niż stopień. W c) wyrazy wypisujemy od x^3 : $-2x^3 + 0x^2 + 0x + 7$. W d) wyraz wolny to iloczyn wyrazów wolnych, $(-1) \cdot 2 \cdot (-3) = 6$, a po wymnożeniu $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. W e) $(1 - 2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$; współczynnikiem wiodącym jest -8 .

2 ODP. a) z lewej do $-\infty$, z prawej do $+\infty$; co najwyżej 5 miejsc zerowych i 4 zakrety. b) oba ramiona w dół; 4 i 3. c) z lewej do $+\infty$, z prawej do $-\infty$; 3 i 2. d) z lewej do $-\infty$, z prawej do $+\infty$; 7 i 6. e) oba ramiona w dół; 4 i 3. f) oba ramiona w górę; 6 i 5.

SZKIC Liczą się wyłącznie stopień n i znak współczynnika wiodącego a_n ; miejsc zerowych jest co najwyżej n , zakrętów co najwyżej $n - 1$. W d) stopień to $4 + 3 = 7$, a $a_n = 1$. W e) najwyższy wyraz iloczynu to $-x^2 \cdot x^2 = -x^4$, więc $n = 4$ i $a_n = -1$. W f) stopień $2 + 4 = 6$, $a_n = 1$. Stopień parzysty daje ramiona w tę samą stronę, nieparzysty – w przeciwnę; ujemne a_n odwraca oba.

3 ODP. a) -1 ; b) 1; c) 8; d) $3^{2026} - 27$; e) 0; f)

0.

SZKIC Suma współczynników to $W(1)$. a) $(-1)^5$. b) $(-1)^{10}$. c) $1^4 \cdot 2^3$. d) $3^{2026} - 3^3$. e) czynnik $(1 - 1)^7$ zeruje iloczyn. f) $(1 - 2 + 1) \cdot 9 = 0$ – to ten sam iloczyn, co w przykładzie o mnożeniu.

4 ODP. a) 8; b) 2; c) 3; d) 3; e) 10; f) 0.

SZKIC Stopień iloczynu to suma stopni: a) $6 + 2$, e) dziesięć czynników stopnia pierwszego. Przy odejmowaniu najwyższe potęgi mogą się skasować, więc trzeba policzyć, co zostaje: b) $x^6 - x^2 - x^6 = -x^2$; c) $(x + 1)^4 - (x - 1)^4 = 8x^3 + 8x$; d) $4x^6 - 4x^3 + 1 - 4x^6 = -4x^3 + 1$; f) $x^4 - 1 - x^4 = -1$, wielomian stały niezerowy ma stopień 0.

5 ODP. a) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 17x - 5$; b) $2x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 7x - 12$; c) $x^6 - x^2 + 4x - 4$; d) $x^4 + x^2 + 1$.

SZKIC Kontrola dla $x = 1$: a) $(-1) \cdot (-2) = 2$ i $1 - 1 - 10 + 17 - 5 = 2$; b) $(-1) \cdot 3 = -3$ i $2 - 2 + 7 - 5 + 7 - 12 = -3$; c) $2 \cdot 0 = 0$ i $1 - 1 + 4 - 4 = 0$; d) $3 \cdot 1 = 3$ i 3. W c) warto zauważyć $(x^3 + (2 - x))(x^3 - (2 - x)) = x^6 - (2 - x)^2$. W d) wyrazy przy x^3 i x znośzą się: $(1 - 1)x^3$, $(1 - 1)x$.

6 ODP. a) $2\sqrt{30}$; b) $4\sqrt{21}$; c) $4\sqrt{33}$; d) $6\sqrt{7}$; e) $20\sqrt{5}$; f) 16.

SZKIC Zamiast odejmować duże liczby, wy-

łączamy wspólny czynnik. a) $144 - 24 = 24(6 - 1) = 24 \cdot 5 = 4 \cdot 30$. b) $400 - 64 = 16(25 - 4) = 16 \cdot 21$. c) $576 - 48 = 48(12 - 1) = 48 \cdot 11 = 16 \cdot 33$. d) $324 - 72 = 36(9 - 2) = 36 \cdot 7$. e) $2500 - 500 = 500(5 - 1) = 2000 = 400 \cdot 5$. f) $400 - 144 = 16(25 - 9) = 16 \cdot 16$ – wyróżnik jest pełnym kwadratem, więc $\sqrt{\Delta} = 16$.

7 ODP. a) $(x^2 + 4x + 3)(x - 2) + 7$; b) $(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 1) + (4x - 3)$; c) $(x^2 - x)(x^2 + x + 1) + (x - 1)$; d) $(x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$, reszta 0; e) $(3x + 2)(x^2 - x - 1) + (5x + 4)$; f) $(x^3 - 1)(x + 2)$, reszta 0.

SZKIC W każdym kroku dzielimy najwyższą potęgę tego, co zostało, przez najwyższą potęgę dzielnika; koniec, gdy zostaje stopień mniejszy niż stopień dzielnika. Kontrola: w a) $W(2) = 8 + 8 - 10 + 1 = 7$ zgadza się z resztą (twierdzenie o reszcie); w f) $W(-2) = 16 - 16 + 2 - 2 = 0$, więc reszta musi wyjść 0. W d) dzielenie wychodzi bez reszty – $x^5 + x + 1$ dzieli się przez $x^2 + x + 1$.

8 ODP. a) $x^2 - 2x - 3$, reszta 0; b) $2x^3 - 3x^2 + 3x$, reszta -1 ; c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, reszta 0; d) $3x^2 - 4x + 8$, reszta -21 ; e) $x^3 + 3x^2 + 6x + 20$, reszta 53; f) $4x^2 + 2x - 1$, reszta $\frac{1}{2}$.

SZKIC Dolne wiersze tabelki: a) 1, -2 , -3 , 0 przy $c = 2$; b) 2, -3 , 3, 0, -1 przy $c = -1$ – w górnym wierszu stoi zero przy x^2 ; c) same jedyńki i reszta 0 przy $c = 1$; d) 3, -4 , 8, -21 przy $c = -2$, z zerem przy x ; e) 1, 3, 6, 20, 53 przy $c = 3$, z zerem przy x^3 ; f) 4, 2, -1 , $\frac{1}{2}$ przy $c = \frac{1}{2}$. Reszta to zawsze $W(c)$: w d) $W(-2) = -24 + 8 - 5 = -21$.

9 ODP. a) -1 , nie; b) 0, tak; c) -2 , nie; d) 0, tak; e) 0, tak; f) 2^{2026} , nie.

SZKIC Reszta z dzielenia przez $x - a$ to $W(a)$.

a) $W(1) = 1 - 5 + 2 + 1$. b) $W(-3) = -27 + 27$. c) $W(-1) = 2 - 1 - 1 - 2$: potęgi parzyste dają 1. d) $W(2) = 64 - 64$. e) $W(2) = 8 - 12 + 6 - 2$; rzeczywiście $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x - 2)(x^2 - x + 1)$. f) $W(1) = 0^{2026} + 2^{2026}$.

10 ODP. a) $p = -\frac{1}{2}$; b) $a = 3$; c) $a = 4$, $b = 1$; d) $a = -1$, $b = 2$; e) $m = 1 - \sqrt{3}$ lub $m = 1 + \sqrt{3}$; f) $a = -4$, $b = 1$, $c = 6$; g) $a = 2$, $b = 5$, $c = -3$.

SZKIC a) $W(-2) = -8 + 4p + 4 + 6 = 0$. b) $W(1) = 2 - 1 + a + 1 = 5$. c) $W(1) = 0$ i $W(-2) = 0$: $a + b = 5$ oraz $4a - 2b = 14$; wielomian to $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$. d) $W(1) = 1 + a + b = 2$, $W(-1) = 1 - a + b = 4$; dodanie stronami daje $b = 2$. e) $W(2) = 8 - 4m + 2m^2 - 10 - 2 = 0$, czyli $m^2 - 2m - 2 = 0$. f) $W(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. g) $W(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$: z x^3 wynika $a = 2$, z wyrazu wolnego $-2c = 6$, a $W(1) = -4 = (1 - 2)(a + b + c)$ daje $b = 5$.

11 ODP. a) $3x + 1$; b) $2x - 1$; c) $2x + 2$; d) x ; e) $(2^{100} - 1)x + 2 - 2^{100}$.

SZKIC Reszta z dzielenia przez wielomian stopnia drugiego to $ax + b$; podstawiamy miejsca zerowe dzielnika. a) $a + b = 4$, $-a + b = -2$. b) $W(3) = 5$, $W(-1) = -3$: $3a + b = 5$, $-a + b = -3$. c) $W(1) = 4$, $W(-1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$. d) miejsca zerowe $x^2 - x$ to 0 i 1: $W(0) = 0 = b$, $W(1) = 1 = a + b$. e) miejsca zerowe to 1 i 2:

$$a + b = 1, 2a + b = 2^{100}, \text{ stąd } a = 2^{100} - 1.$$

12 ODP. a) $(x - 2)(x - 3)$; b) $(x - 2)(x + 5)$; c) $(x - 3)(2x - 1)$; d) $(x - 1)(x - \sqrt{3})$.

SZKIC Pierwszego pierwiastka szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego i sprawdzamy podstawieniem, a drugi czytamy z iloczynu $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. a) $W(2) = 0$, iloczyn 6, więc drugim jest 3. b) $W(2) = 0$, iloczyn -10 , drugi to -5 . c) $W(3) = 0$, iloczyn $\frac{3}{2}$, drugi to $\frac{1}{2}$; przy $a = 2$ postać iloczynowa to $2(x - 3)(x - \frac{1}{2}) = (x - 3)(2x - 1)$. d) $W(1) = 0$, iloczyn $\sqrt{3}$, więc drugim pierwiastkiem też jest $\sqrt{3}$.

13 ODP. a) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$; pierwiastki 1, 2, -3 . b) $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$; $-1, 2, -3$. c) $(x + 1)(x - 2)^2$; $-1, 2$. d) $(x + 1)(2x - 1)(x - 2)$; $-1, \frac{1}{2}, 2$. e) $(x - 2)(x^2 + x + 2)$; jedyny pierwiastek 2. f) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; $\pm 1, \pm 2$. g) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$; 1, -1 . h) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)$; 1, 2.

SZKIC Zgadnięty pierwiastek: a) 1; b) -1 ; c) -1 , a po wyłączeniu $x + 1$ zostaje $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$; d) -1 , zostaje $2x^2 - 5x + 2$ o pierwiastkach $\frac{1}{2}$ i 2; e) 2, zostaje $x^2 + x + 2$ z $\Delta = -7$; f) podstawienie $t = x^2$ daje $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$; g) 1 i -1 , zostaje $x^2 + x + 1$ z $\Delta = -3$; h) 1 i 2, zostaje $x^2 + x + 1$. Czynniki z ujemnym wyróżnikiem nie rozkładamy dalej.

14 ODP. a) $x \in \{-2, 0, 2\}$; b) $x \in \{-1, 1\}$; c) $x \in \{-3, -2, 2, 3\}$; d) $x \in \{-3, -2, 2\}$; e) $x \in \{-2, -1, 1\}$; f) $x = -2$; g) $x \in \{-2, -\frac{1}{2}, 2\}$; h) $x \in \{-1, 1\}$.

SZKIC a) $x(x - 2)(x + 2) = 0$ – nie dzielimy przez x , bo zgubilibyśmy rozwiązanie 0. b)

$$x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)^2(x + 1).$$

$$\text{c) } t = x^2: t^2 - 13t + 36 = 0, t = 4$$

$$\text{lub } t = 9. \text{ d) grupowanie: } x^2(x + 3) -$$

$$4(x + 3) = (x + 3)(x - 2)(x + 2). \text{ e)}$$

$$(x - 1)(x + 1)(x + 1)(x + 2) = 0; \text{ rozwiązanie } -1 \text{ liczy się raz. f) } (x + 2)(x^2 - 2x + 4),$$

$$\text{drugi czynnik ma } \Delta < 0. \text{ g) } x^2(2x + 1) -$$

$$4(2x + 1) = (2x + 1)(x - 2)(x + 2). \text{ h)}$$

$$t = x^2: t^2 + t - 2 = (t + 2)(t - 1), \text{ a } t = -2$$

odpada.

15 ODP. a) $x \in (-2, 1) \cup (4, +\infty)$. b)

$$x \in \langle -1, 0 \rangle \cup \{3\}. \text{ c) } x \in (-\infty, -2) \cup$$

$$\{1\} \cup \langle 3, +\infty \rangle. \text{ d) } x \in (-5, 2). \text{ e) } x \in \langle -1, 2 \rangle.$$

$$\text{f) } x \in (-2, 1) \cup (1, 3).$$

SZKIC Szkic rysujemy od prawej: od góry, gdy dla dużych x wielomian jest dodatni. W b) trójka ma krotność 2, więc wykres się od niej odbija, a przy nierówności nieostrej wchodzi do odpowiedzi jako punkt osobny; tak samo jedynka (krotność 4) w c). W d) czynnik $x^2 + 4$ jest stale dodatni i nie wnosi miejsc zerowych. W e) i f) najwyższy wyraz to $-x^6$, więc z prawej idziemy od dołu. W f) nierówność jest ostra, więc jedynka – mimo odbicia – z odpowiedzi wypada.

16 ODP. a) $x \in (-\infty, -2) \cup \langle 1, +\infty \rangle$. b)

$$x \in (-\infty, 0) \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle. \text{ c) } x \in (-\infty, 1).$$

$$\text{d) } x \in \langle -5, -2 \rangle \cup (1, +\infty).$$

SZKIC Najpierw założenia, potem znak ilorazu zastępujemy znakiem iloczynu. a) $x \neq -2$ i $(x - 1)(x + 2) \geq 0$. b) $\frac{1-2x}{x} \leq 0$, czyli $x(1 - 2x) \leq 0$ przy $x \neq 0$. c) po przeniesieniu jedynki zostaje $\frac{4}{x-1} < 0$, więc $x - 1 < 0$. d) różnica ułamków to $\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} \geq 0$, czyli $(x + 5)(x - 1)(x + 2) \geq 0$ przy $x \neq 1$ i $x \neq -2$ – oba te punkty wypadają z od-

powiedzi.

Dodatek

17 ODP. a) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$;

b) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$; c)

$(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1)$; d)

$(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$.

WSK. Uzupełnij do kwadratu sumy i zastosuj wzór na różnicę kwadratów, jak w przykładzie 7.

SZKIC a) $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 =$

$(x^2 + 2)^2 - (2x)^2$. b) $(x^2 + 1)^2 - x^2$. c)

$(x^2 - 1)^2 - 4x^2$; tu trójmiany mają dodatnie wyróżniki i rozkładają się dalej:

$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$,

podobnie drugi. d) $(x^2 + 4)^2 - 4x^2$. W a),

b), d) wyróżniki są ujemne, więc to rozkład końcowy.

18 ODP. Przy parzystych potęgach: $\frac{1+3^{10}}{2} = 29525$; przy nieparzystych: $\frac{1-3^{10}}{2} = -29524$.

SZKIC $W(1) = 1$ to suma wszystkich współczynników, $W(-1) = (-3)^{10} = 3^{10} = 59049$ to suma ze zmienionym znakiem przy nieparzystych potęgach. Suma parzystych to

$\frac{W(1)+W(-1)}{2}$, nieparzystych $\frac{W(1)-W(-1)}{2}$. Kontrola: obie sumy dają razem 1.

19 ODP. Pierwiastek leży w przedziale $(-2, -1)$.

WSK. Rozważ osobno $x \geq 0$, $-1 \leq x < 0$ i $x < -1$.

SZKIC Dla $x \geq 1$ jest $x^5 \geq x$, więc $W(x) \geq 1$.

Dla $0 \leq x < 1$ mamy $x^5 \geq 0$ i $1 - x > 0$,

więc $W(x) > 0$. Dla $-1 \leq x < 0$ jest

$x^5 \geq -1$ oraz $1 - x > 1$, więc $W(x) > 0$.

Zatem na $[-1, +\infty)$ pierwiastków nie ma.

Dla $x < y \leq -1$ różnica $W(y) - W(x) = (y^5 - x^5) - (y - x)$ jest dodatnia, bo $y^5 - x^5 = (y - x)(y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4)$,

a każdy z pięciu składników w drugim nawiasie jest co najmniej 1 (potęgi parzyste liczb o module co najmniej 1 oraz iloczyny dwóch liczb ujemnych), więc nawias przekracza 1. Wielomian jest więc rosnący

na $(-\infty, -1]$ i ma tam co najwyżej jeden pierwiastek, a ma dokładnie jeden, bo

$W(-2) = -29 < 0 < 1 = W(-1)$ i funkcja jest ciągła. Numerycznie $x \approx -1,167$.