

FUNKCJA KWADRATOWA

Zadania z parametrem · matura rozszerzona

ZAKRES

MATURY 2015–2026

01





Dzień dobry!

Nazywam się **Tomasz Saweczko**, w internecie jestem znany jako „**Łysy uczy matmy**”. Uczę matematyki od ponad 20 lat, a studiowałem ją na Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu.



DARMOWY KURS DO MATURY ROZSZERZONEJ

Filmy, materiały do pobrania i zadania do samodzielnej pracy – całość prowadzę na YouTube, a komplet zebrany jest tutaj:

lysyuczmatmy.pl/yt-matura-rozszerzona-kurs



ARKUSZE PRÓBNE

Własne arkusze do przećwiczenia całej matury, z rozwiązaniami:

[Arkusze próbne 2027](#)



YouTube



TikTok



Instagram



lysyuczmatmy.pl

Powodzenia na maturze – i do zobaczenia na kanale!

Spis treści

1.	Niezbędnik zadań maturalnych	4
	Cztery kroki, z których składa się każde takie zadanie	4
	Wyrażenia, które pojawiają się w zadaniach z parametrem z funkcją kwadratową	5
	Kiedy trzeba założyć, że współczynnik przy x^2 nie jest zerem	8
	Odwrotności pierwiastków, czyli warunek na wyraz wolny	9
	Kiedy warto liczyć pierwiastki równania bezpośrednio?	12
	Zadania z warunkami położenia pierwiastków na osi Ox	14
	Zadania, w których równanie jest stopnia trzeciego	16
	Kiedy warunek rozpada się na przypadki	18
	Warunek niesymetryczny: jeden pierwiastek przez drugi	20
	Inne typy zadań	22
2.	Ćwiczenia	24
	Wyznaczanie parametru m	26
	Wypisywanie warunków	27
3.	Dodatek	29
	Dowody	29
	Tabelka ze wszystkimi wyrażeniami	30
	Odpowiedzi i krótkie rozwiązania	31

Niezbędnik zadań maturalnych

Ten rozdział zbiera to, co w zadaniach z parametrem z funkcją kwadratową wraca najczęściej. Zaczynamy od **czterech kroków**, z których składa się każde takie zadanie. Potem **wyrażenia** z pierwiastkami x_1 i x_2 , które da się zapisać przez ich sumę i iloczyn – to one otwierają drogę do wzorów Viète’a; dwa z nich rozpisujemy krok po kroku. Dalej dwa **założenia**, bez których odpowiedź bywa błędna: $a \neq 0$, gdy parametr stoi przy x^2 , oraz $c \neq 0$, gdy w warunku pojawiają się odwrotności pierwiastków. Następnie wyjątek od reguły: zadania, w których **wygodniej policzyć pierwiastki wprost**, bo wyróżnik nie zależy od parametru albo jest pełnym kwadratem. Na koniec warunki dotyczące **położenia pierwiastków na osi Ox** , których wzory Viète’a same nie załatwiają, równania **stopnia trzeciego** z czynnikiem liniowym i trójmianem. Na koniec trzy sytuacje z ostatnich części filmu: warunek, który **rozpada się na przypadki**, warunek **niesymetryczny**, który rozróżnia pierwiastki, oraz żądania dotyczące **całej funkcji**, a nie jej pierwiastków.

Cztery kroki, z których składa się każde takie zadanie

Zadania z parametrem z funkcją kwadratową mają zaskakująco stałą budowę. Prawie zawsze przebiega ona tak:

1. **Warunki na istnienie pierwiastków.** Wyróżnik zależy od parametru, więc warto pisać go jako $\Delta(m)$ – łatwiej się wtedy połapać, co jest czym. Do tego dochodzą założenia, bez których równanie nie jest kwadratowe albo warunek z treści nie ma sensu.
2. **Przekształcenie warunku z treści.** Wyrażenie z pierwiastkami zapisujemy tak, żeby zależało wyłącznie od sumy $s = x_1 + x_2$ i iloczynu $p = x_1 \cdot x_2$, a potem podstawiamy wzory Viète’a. Od tego momentu w zadaniu nie ma już x_1 ani x_2 – jest tylko m .
3. **Rachunki.** Zwykle równanie albo nierówność z m : kwadratowa, wielomianowa lub wymierna. Etap najbardziej mozolny i to tutaj najczęściej gubi się punkty.
4. **Część wspólna.** Odpowiedzią jest przecięcie wszystkich warunków: tych z kroku 1 i tego z kroku 3.

W kroku pierwszym prawie zawsze obowiązuje **ostra** nierówność $\Delta(m) > 0$. Treść mówi „dwa różne rozwiązania” albo „dwa różne miejsca zerowe”, a $\Delta = 0$ daje jedno rozwiązanie (podwójne). Zapisanie $\Delta(m) \geq 0$ kosztuje punkt za ten etap, a zwykle także punkt za odpowiedź, bo w kroku czwartym przedział wychodzi domknięty zamiast otwartego.

Wyrażenia, które pojawiają się w zadaniach z parametrem z funkcją kwadratową

Wszystkie mają jedną wspólną cechę: da się je zapisać **wyłącznie przez sumę $x_1 + x_2$ i iloczyn $x_1 \cdot x_2$** . I o to właśnie chodzi – dopiero wtedy wolno sięgnąć po wzory Viète’a, podstawić $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ i zamienić warunek z treści na nierówność (albo równanie) z jedną niewiadomą m . W zdecydowanej większości przypadków samych pierwiastków w ogóle nie liczymy – choć zdarzają się zadania, w których wyróżnik wychodzi tak ładny, że wypisanie pierwiastków wprost skraca robotę. Dlatego przy każdym takim warunku pierwsze pytanie brzmi: *jak to przekształcić, żeby zależało tylko od sumy i iloczynu?*

Tak zbudowana jest **większość maturalnych zadań z parametrem** – ale nie wszystkie. Zdarzają się zadania, w których warunek dotyczy czegoś innego niż wartość wyrażenia; wracamy do nich w dalszej części materiału.

$$x_1^2 + x_2^2$$

$$x_1^3 + x_2^3$$

$$x_1^4 + x_2^4$$

$$x_1^2 - x_2^2$$

$$x_1^4 - x_2^4$$

$$(x_1 - x_2)^2$$

$$|x_1 - x_2|$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

WYRAŻENIE

PRZYKŁAD 1

Rozpiszmy $x_1^4 + x_2^4$ tak, żeby zależało tylko od sumy $s = x_1 + x_2$ i iloczynu $p = x_1 \cdot x_2$.

- I Czwarte potęgi to kwadraty kwadratów, więc traktujemy x_1^2 i x_2^2 jak dwie nowe liczby i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$:

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4.$$

Stąd, po przeniesieniu środkowego składnika na drugą stronę,

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2.$$

- II Zostały dwa kawałki i oba już umiemy. Kwadrat sumy daje $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, czyli

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p,$$

a drugi kawałek to po prostu kwadrat iloczynu:

$$x_1^2x_2^2 = (x_1x_2)^2 = p^2.$$

- III Wstawiamy jedno i drugie do wyniku z kroku I:

$$x_1^4 + x_2^4 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2.$$

Wyrażenie zależy już wyłącznie od s i p , więc możemy podstawić $s = -\frac{b}{a}$ oraz $p = \frac{c}{a}$.

- IV Zobaczmy to na autentycznym warunku (CKE, czerwiec 2026, zadanie nr 11): dla równania $x^2 + mx + m = 0$ mamy $s = -m$ oraz $p = m$, a warunek brzmi $x_1^4 + x_2^4 + 4x_1^3x_2^3 \geq 3$. Ostatni składnik to $4p^3$, więc

$$\begin{aligned} (m^2 - 2m)^2 - 2m^2 + 4m^3 &\geq 3 \\ m^4 - 4m^3 + 4m^2 - 2m^2 + 4m^3 &\geq 3 \\ m^4 + 2m^2 - 3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Z warunku na pierwiastki została zwykła nierówność z niewiadomą m .

WYRAŻENIE

PRZYKŁAD 2

A teraz $|x_1 - x_2|$ – wyrażenie, które wygląda groźnie, bo ma wartość bezwzględną i nie jest symetryczne.

- I Sama różnica $x_1 - x_2$ przez s i p się nie wyrazi (zamiana pierwiastków miejscami zmienia jej znak), ale jej **kwadrat** – owszem:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = s^2 - 4p.$$

Skoro wartość bezwzględna jest nieujemna, to

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{s^2 - 4p}.$$

Można też inaczej: odjęcie wzorów na pierwiastki daje $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

- II Tyle że z pierwiastkiem kwadratowym źle się liczy. Na maturze to wyrażenie prawie zawsze pojawia się **wewnątrz nierówności**, na przykład (CKE, maj 2016, zadanie nr 12):

$$|x_1 - x_2| < 3 \quad \text{dla trójmianu } x^2 + 2(m+1)x + 6m + 1.$$

- III Obie strony są nieujemne, więc wolno je **podnieść do kwadratu** – i pierwiastek znika:

$$|x_1 - x_2| < 3 \iff (x_1 - x_2)^2 < 9 \iff s^2 - 4p < 9.$$

To jest cała sztuczka: nie liczymy $|x_1 - x_2|$, tylko od razu pracujemy na kwadracie.

- IV Podstawiamy $s = -2(m+1)$ oraz $p = 6m+1$:

$$4(m+1)^2 - 4(6m+1) < 9$$

$$4m^2 + 8m + 4 - 24m - 4 < 9$$

$$4m^2 - 16m - 9 < 0,$$

skąd $m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Kiedy trzeba założyć, że współczynnik przy x^2 nie jest zerem

Zapis $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest funkcją kwadratową dopiero przy założeniu $a \neq 0$. Kiedy przy x^2 stoi wyrażenie z parametrem, to założenie przestaje być formalnością i zaczyna decydować o odpowiedzi.

Weźmy równanie $mx^2 + 2x + 1 = 0$ i pytanie o dwa różne rozwiązania. Licząc sam wyróżnik, dostajemy $\Delta = 4 - 4m > 0$, czyli $m < 1$. W tym przedziale leży $m = 0$ – ale dla $m = 0$ równanie ma postać $2x + 1 = 0$, jest liniowe i ma **jedno** rozwiązanie. Odpowiedź $m < 1$ jest więc błędna; poprawna to $m \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

Wzory Viète'a przypominają o tym założeniu same z siebie: w obu mianownik jest równy a . Jeżeli a zależy od parametru, to wartość, dla której $a = 0$, trzeba wyłączyć **zanim** zacznie się liczyć wyróżnik.

Nowsze arkusze zwykle podają to założenie w treści („gdzie $m \neq 2$ ”), starsze nie. Podane założenie nie zwalnia z myślenia: łatwo o nim zapomnieć w toku rachunków, a w odpowiedzi i tak musi zostać uwzględnione.

CZERWIEC 2024 · ZADANIE NR 12

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(3 - m) \cdot x^2 + (m + 1) \cdot x - (m + 1)^2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7.$$

Zapisz obliczenia.

Bywa też, że przypadku $a = 0$ nie wolno po prostu odrzucić – trzeba go rozpatrzyć osobno i sprawdzić, czy powstałe równanie albo nierówność liniowa spełnia warunki zadania. Tak jest w zadaniu z lipca 2020, które stoi w sekcji *Inne typy zadań*.

Odwrotności pierwiastków, czyli warunek na wyraz wolny

Gdy w warunku z treści pierwiastki stoją w mianowniku, dochodzi jeszcze jedno założenie: $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$. Wygląda na kłopotliwe, bo pierwiastków przecież nie liczymy – ale sprowadza się do współczynnika, który widać w równaniu na pierwszy rzut oka.

Zero jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ dokładnie wtedy, gdy $f(0) = 0$, a $f(0) = c$. Zatem

$$x_1 \neq 0 \text{ i } x_2 \neq 0 \iff c \neq 0.$$

Zamiast dwóch warunków na nieznane liczby mamy jeden warunek na wyraz wolny. Jeżeli c zależy od parametru, daje to zwykle równanie do rozwiązania i wykluczenia.

Same wyrażenia rozpisują się przez sumę i iloczyn tak samo jak pozostałe:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{s}{p}, \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{s^2 - 2p}{p^2}.$$

Po podstawieniu wzorów Viète'a powstaje wyrażenie **wymierne** z parametrem w mianowniku. Nierówności wymiernej nie wolno rozwiązywać przez mnożenie obu stron przez mianownik, dopóki nie wiadomo, jaki ma on znak. Bezpiecznie jest przenieść wszystko na jedną stronę, sprowadzić do wspólnego mianownika i zbadać znak ilorazu.

MAJ 2022 · ZADANIE NR 12

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (m + 1)x + m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunki: $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ oraz

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}.$$

CZERWIEC 2018 · ZADANIE NR 14

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - 3mx + (m + 1)(2m - 1) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz

$$0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}.$$

Na co zwrócić uwagę. W drugim zadaniu warunek jest nierównością **podwójną**. Rozwiązujemy ją jak dwie osobne nierówności i bierzemy część wspólną – razem z warunkami $\Delta(m) > 0$ oraz $c \neq 0$.

Gdy wyrażenie samo staje się funkcją. Bywa, że po podstawieniu wzorów Viète'a wartość wyrażenia przestaje być liczbą, a staje się *wzorem funkcji zmiennej-parametru* – i to o tę funkcję pyta treść.

CZERWIEC 2016 · ZADANIE NR 12

4 PKT

Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$k^2x^2 + (k - 1)x + 1 = 0,$$

gdzie $k \neq 0$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2^m$.

Zadanie idzie trzema krokami, z których dwa pierwsze już znamy. **Raz:** warunki z funkcji kwadratowej – tu $k \neq 0$ oraz $\Delta(k) > 0$ – dają **dziedzinę parametru**. **Dwa:** sumę odwrotności rozpisujemy przez sumę i iloczyn, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{s}{p}$, i po skróceniu zostaje zwykły wzór na m w zależności od k . **Trzy:** tak otrzymany wzór traktujemy jak funkcję i szkicujemy jej wykres **na tej dziedzinie**, a zbiór wartości po prostu z niego odczytujemy.

Dziura w dziedzinie robi dziurę w zbiorze wartości. Założenie $k \neq 0$ wycina jeden punkt z przedziału, a że funkcja jest różnowartościowa, to z odpowiedzi wypada dokładnie jedna liczba – i to ona odróżnia rozwiązanie poprawne od takiego, które dostaje najwyżej trzy punkty na pięć. Końce przedziału też nie należą do dziedziny, więc na wykresie idą tam **puste kółka**.

Treść tego zadania jest sformułowana niedbale: wzór funkcji zapisano jako $f(x)$, choć wartość wyrażenia nie zależy od x , tylko od parametru k . Czytając takie polecenie, patrzymy na to, co *realnie* się zmienia – i składamy funkcję zmiennej k .

Kiedy warto liczyć pierwiastki równania bezpośrednio?

Wzory Viète'a są wygodne dlatego, że pozwalają nie liczyć pierwiastków. Ale zdarzają się zadania, w których **wyróżnik nie zależy od parametru albo jest pełnym kwadratem** – wtedy pierwiastek z Δ nie jest żadnym „brzydkim” wyrażeniem i pierwiastki równania wypisuje się zwykłym wzorem. Dalsza część zadania robi się wtedy rachunkiem na dwóch wyrażeniach z m . Poniżej autentyczne zadanie, w którym ta droga jest wyraźnie krótsza.

CZERWIEC 2019 · ZADANIE NR 12

PRZYKŁAD 3

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania x_1, x_2 spełniające nierówność

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}.$$

I Zaczynamy jak zawsze – od wyróżnika. I tu niespodzianka:

$$\begin{aligned}\Delta &= (2 - 4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - m - 2) \\ &= 4 - 16m + 16m^2 - 16m^2 + 16m + 32 \\ &= 36.\end{aligned}$$

Parametr się skrócił. Wyróżnik jest **stały i dodatni**, więc równanie ma dwa różne rozwiązania dla *każdego* m – pierwszy warunek nie zawęży niczego.

II Skoro $\sqrt{\Delta} = 6$ jest liczbą, a nie wyrażeniem z pierwiastkiem, to pierwiastki wypisują się **wprost**:

$$x_1 = \frac{4m - 2 - 6}{2 \cdot 4} = \frac{m - 2}{2}, \quad x_2 = \frac{4m - 2 + 6}{2 \cdot 4} = \frac{m + 1}{2}.$$

Zamiast dwóch nieznanych liczb mamy dwa zwykłe wyrażenia z m .

III Warunek „oba dodatnie” robi się banalny – zamiast układu $x_1 + x_2 > 0$ i $x_1 x_2 > 0$ wystarczy zażądać dodatniości dwóch ułamków:

$$\frac{m - 2}{2} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{m + 1}{2} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m > 2.$$

IV Drugi warunek też liczymy przez podstawienie, bez żadnych wzorów Viète'a:

$$\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4}$$

$$m^2 + 2m + 1 + m^2 - 4m + 4 \leq 17$$

$$2m^2 - 2m - 12 \leq 0$$

$$m^2 - m - 6 \leq 0$$

$$(m+2)(m-3) \leq 0,$$

skąd $m \in [-2, 3]$. Razem z warunkiem $m > 2$ daje to odpowiedź $m \in (2, 3]$.

Morał. Zanim rzucisz się na wzory Viète'a, policz wyróżnik do końca. Jeśli wyjdzie **liczba** albo **pełny kwadrat**, pierwiastki dadzą się wypisać wzorem i dalsza część zadania jest zwykle krótsza oraz mniej podatna na pomyłkę niż droga przez sumę i iloczyn.

Przy pełnym kwadracie uważaj na pierwiastkowanie. Jeżeli $\Delta = (m-2)^2$, to

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(m-2)^2} = |m-2|,$$

a **nie** $m-2$ – dla $m < 2$ ta liczba jest ujemna, a pierwiastek kwadratowy nigdy nie jest ujemny. Albo rozpatrujesz oba przypadki znaku, albo – co zwykle wygodniejsze – zapisujesz oba pierwiastki z wartością bezwzględną i dopiero potem sprawdzasz, który jest większy.

Zadania z warunkami położenia pierwiastków na osi Ox

W tych zadaniach warunek nie dotyczy *wartości* żadnego wyrażenia, tylko tego, **gdzie na osi** leżą pierwiastki. Wzory Viète'a same tego nie załatwiają – trzeba spojrzeć na wykres.

CZERWIEC 2017 · ZADANIE NR 13

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty, 3)$.

MAJ 2026 · ZADANIE NR 10

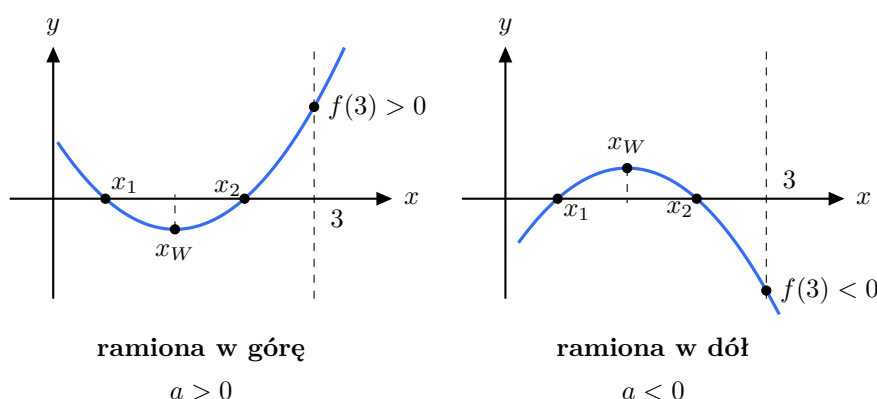
5 PKT

Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m , gdzie $m \neq 0$, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$$

ma dwa różne miejsca zerowe x_1 oraz x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$. **Zapisz obliczenia.**

Zobaczmy, skąd biorą się warunki. Weźmy najprostszą wersję takiego zadania: **oba pierwiastki mają być mniejsze od 3**. Rysujemy parabolę i pionową prostą $x = 3$.



Z rysunku widać trzy rzeczy, które muszą zachodzić **jednocześnie**:

1. $\Delta > 0$ – parabola musi w ogóle przeciąć oś Ox w dwóch punktach. Bez tego nie ma o czym mówić.
2. **Wartość w punkcie granicznym** – w $x = 3$ parabola musi być *po tej samej stronie osi*, co jej ramiona. Przy $a > 0$ ramiona idą w górę, więc $f(3) > 0$; przy $a < 0$ w dół, więc

$f(3) < 0$. Oba przypadki opisuje jeden zapis:

$$a \cdot f(3) > 0.$$

Gdyby było odwrotnie, punkt 3 leżałby *między* pierwiastkami – a wtedy jeden z nich byłby większy od 3.

3. $x_W < 3$ – wierzchołek (a więc i cała „dolina” między pierwiastkami) musi leżeć na lewo od 3.

Żadnego z tych trzech warunków nie wolno pominąć. Sam warunek $a \cdot f(3) > 0$ nie wystarczy: spełnia go także parabola, której **oba** pierwiastki są większe od 3 – wtedy w punkcie 3 też jesteśmy po stronie ramion. Dopiero warunek na wierzchołek rozstrzyga, po której stronie liczby 3 siedzą pierwiastki.

Ten sam zestaw działa dla dowolnej liczby k i dla przedziału. Żeby oba pierwiastki leżały w (u, v) , żądamy $\Delta > 0$, $a \cdot f(u) > 0$, $a \cdot f(v) > 0$ oraz $u < x_W < v$ – czyli tego samego, tylko z dwóch stron.

Zadania, w których równanie jest stopnia trzeciego

Formalnie to nie są równania kwadratowe – po lewej stronie stoi **iloczyn czynnika liniowego i trójmianu**. Ale cała robota i tak dzieje się w trójmianie, bo pierwiastek czynnika liniowego dostajemy za darmo: z $(x - k) \cdot f(x) = 0$ od razu widać, że $x = k$ jest rozwiązaniem **zawsze**, niezależnie od parametru.

Dlatego w takich zadaniach czytamy treść wyjątkowo uważnie: liczy się, **ile ma być rozwiązań** i czy mają być **różne**. Od tego zależy wszystko – ile pierwiastków ma dołożyć trójmian i czy wolno mu trafić w ten sam punkt k , który już mamy. Warunek „ k jest (albo nie jest) pierwiastkiem trójmianu” sprawdzamy **podstawieniem**: liczymy $f(k)$ i żądamy $f(k) = 0$ albo $f(k) \neq 0$. To jedyne miejsce w całym materiale, gdzie podstawianie jest wygodniejsze od wzorów Viète’a.

CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 13

6 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(x - 4)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6] = 0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 oraz x_3 , spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51.$$

Na co zwrócić uwagę. Jedno rozwiązanie znamy: $x_3 = 4$. Skoro razem mają być **trzy różne**, to trójmian $x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6$ musi dołożyć **dwa różne** pierwiastki ($\Delta > 0$) i **żaden z nich nie może być równy 4** – inaczej zamiast trzech rozwiązań mielibyśmy dwa. Ten drugi warunek to po prostu $f(4) \neq 0$, czyli $16 + 4(m - 3) + m^2 - m - 6 \neq 0$. Dopiero potem bierzemy się za nierówność z treści, podstawiając w niej $x_3 = 4$.

CZERWIEC 2021 · ZADANIE NR 12

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(x - 3)(x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m) = 0$$

ma dokładnie dwa rozwiązania.

Na co zwrócić uwagę. Tu znamy rozwiązanie $x = 3$, a razem mają być **dokładnie dwa**. Trójmian ma więc dołożyć **dokładnie jedno nowe** rozwiązanie, a to może się zdarzyć na dwa sposoby:

- trójmian ma **jeden pierwiastek podwójny**, różny od 3 – czyli $\Delta = 0$ i $f(3) \neq 0$;
- trójmian ma **dwa różne** pierwiastki, ale jeden z nich *pokrywa się* z trójką – czyli $\Delta > 0$ i $f(3) = 0$.

Te przypadki się wykluczają, więc odpowiedzią jest ich **suma**, a nie część wspólna. Zwróć uwagę, że to jedyne zadanie w materiale, w którym warunek $\Delta = 0$ jest dopuszczalny.

Kiedy warunek rozpada się na przypadki

Warunek z treści bywa **równaniem**, nie nierównością. Wtedy po podstawieniu wzorów Viète'a często zostaje coś, co po obu stronach ma wspólny czynnik – i tu zaczyna się najczęściej popełniany błąd w tych zadaniach.

MAJ 2015 · ZADANIE NR 13

5 PKT

Dany jest trójmian kwadratowy

$$f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek

$$x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4.$$

Warunek wygląda tak, że aż się prosi o skrócenie:

$$x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4.$$

Prawa strona to różnica kwadratów, więc $x_1^4 - x_2^4 = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)$ i po obu stronach stoi ten sam czynnik $x_1^2 - x_2^2$.

Nie wolno podzielić obu stron przez $x_1^2 - x_2^2$. To wyrażenie może być zerem – dzieląc, tracimy wszystkie te wartości parametru, dla których właśnie tak jest. Dzielić wolno tylko przez coś, o czym *wiemy*, że jest różne od zera.

Zamiast dzielić, przenosimy wszystko na jedną stronę i wyłączamy wspólny czynnik przed nawias:

$$(x_1^2 - x_2^2)(1 - (x_1^2 + x_2^2)) = 0,$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(1 - (x_1^2 + x_2^2)) = 0.$$

Iloczyn jest zerem, gdy zeruje się któryś z czynników. Pierwszy odpada: w treści stoi „dwa różne pierwiastki”, więc $x_1 - x_2 \neq 0$ – i dopiero *teraz*, mając to na piśmie, wolno przez ten czynnik podzielić. Zostaje alternatywa:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{lub} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Oba przypadki liczymy osobno, każdy przez sumę i iloczyn, i każdy daje swoich kandydatów na m .

Na koniec wracamy z kandydatami do **dziedziny parametru** – czyli do warunków $a \neq 0$ oraz $\Delta(m) > 0$, które wypisaliśmy na samym początku. W tym zadaniu z pierwszego przypadku wychodzi $m = 2$, a z drugiego dwie wartości; $\Delta(m) > 0$ przepuszcza tylko jedną z nich.

Gdy warunek jest **równaniem**, rozwiązanie nierówności $\Delta(m) > 0$ można odłożyć na koniec: kandydatów bywa kilku i czasem szybciej sprawdzić każdego z osobna, niż rozwiązywać nierówność. To wygoda, nie reguła – gdy warunek jest *nierównością*, kandydatów jest nieskończenie wielu i nierówności $\Delta(m) > 0$ nie da się ominąć.

Warunek niesymetryczny: jeden pierwiastek przez drugi

Wszystkie warunki z poprzednich sekcji miały jedną wspólną cechę: nie zmieniały się po zamianie x_1 z x_2 miejscami. Suma, iloczyn, suma kwadratów, moduł różnicy – wszystko jedno, który pierwiastek nazwiemy pierwszym. Dlatego wystarczały wzory Viète’a, które też o tej kolejności nic nie wiedzą.

Bywa jednak warunek, który **rozdziela** pierwiastki.

ARKUSZ PRÓBNY NR 5 · ZADANIE NR 8

5 PKT

Dane jest równanie kwadratowe

$$x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$$

z niewiadomą x oraz parametrem m . Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których to równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , przy czym jedno z nich jest dwa razy większe od drugiego. Zapisz obliczenia.

„Jedno z nich jest dwa razy większe od drugiego” – ale które od którego? Wzory Viète’a tego nie rozstrzygną, bo same są symetryczne. Zamiast nich robimy rzecz prostszą: **nadajemy pierwiastkom nazwy**. Niech mniejszy z nich to x_0 ; wtedy drugi to $2x_0$ i znamy oba pierwiastki co do wzoru.

Skoro znamy pierwiastki, a przy x^2 stoi jedynka, to całe równanie da się zapisać w **postaci iloczynowej**:

$$(x - x_0)(x - 2x_0) = 0,$$

a po wymnożeniu

$$x^2 - 3x_0x + 2x_0^2 = 0.$$

To ma być to samo równanie, co w treści. Dwa wyrażenia kwadratowe są równe dokładnie wtedy, gdy mają **te same współczynniki**, więc przy x i przy wyrazie wolnym dostajemy układ:

$$\begin{cases} 3x_0 = m + 2, \\ 2x_0^2 = 2m. \end{cases}$$

Z pierwszego równania $m = 3x_0 - 2$; po wstawieniu do drugiego zostaje równanie kwadratowe na x_0 , a z niego dwie możliwości. Każda daje parę pierwiastków, a każda para – jedną wartość m .

Ta sama droga działa dla każdego warunku, który wiąże pierwiastki *konkretną* zależnością: „jeden jest o 3 większy od drugiego” (x_0 i $x_0 + 3$), „stosunek pierwiastków wynosi k ” (x_0 i kx_0), „jeden jest odwrotnością drugiego” (x_0 i $\frac{1}{x_0}$). Za każdym razem: nazwij jeden pierwiastek, zapisz drugi przez niego, porównaj współczynniki.

Postać iloczynowa to $a(x - x_1)(x - x_2)$ – **ze współczynnikiem a z przodu**. Powyżej mogliśmy go pominąć tylko dlatego, że przy x^2 stała jedynka. Gdy przy x^2 siedzi parametr, trzeba go wypisać, a do tego osobno założyć, że nie jest zerem.

Nagroda za tę metodę przychodzi na końcu: pierwiastki wychodzą *jawnie*, więc nie trzeba wracać do nierówności $\Delta(m) > 0$. Skoro wyszły dwie różne liczby i równanie ma dokładnie taką postać iloczynową, to dwa różne rozwiązania rzeczywiste po prostu są.

Inne typy zadań

Zdarzają się warunki, które o pierwiastkach nie mówią nic – dotyczą całej funkcji. Wzory Viète’a są wtedy bezużyteczne, a w ich miejsce wchodzi to samo co przy położeniu pierwiastków: **wykres**.

Nierówność prawdziwa dla każdego x

LIPIEC 2020 · ZADANIE NR 11

5 PKT

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność

$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x > 2mx - 2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

Najpierw porządek: przenosimy wszystko na jedną stronę, żeby pytanie brzmiało „kiedy to wyrażenie jest dodatnie dla każdego x ”. Potem uwaga, od której całe zadanie zależy.

Przy x^2 stoi parametr, więc **to nie musi być nierówność kwadratowa**. Współczynnik przy x^2 może się wyzerować i wtedy zostaje nierówność liniowa. Tego przypadku nie wolno *wykluczyć* – trzeba go **rozpatrzyć**, bo treść nigdzie nie mówi, że nierówność jest kwadratowa.

Przypadek liniowy. Wyznaczamy te wartości parametru, dla których współczynnik przy x^2 jest zerem, i *wstawiamy je po kolei* do nierówności. Zostaje wyrażenie stopnia co najwyżej pierwszego i pytamy, czy jest dodatnie dla każdego x . Gdy zniknie także x , zostaje zdanie o samych liczbach – prawdziwe albo fałszywe. Gdy x zostanie, nierówność liniowa nigdy nie jest prawdziwa dla wszystkich x : wystarczy pójść dostatecznie daleko w jedną stronę.

Przypadek kwadratowy. Parabola ma leżeć **cała nad osią** Ox . Gdyby ramiona szły w dół, prędzej czy później zeszlaby pod oś, więc $a > 0$. Gdyby dotykała osi dzióbkiem, w tym jednym punkcie przyjąłaby wartość zero, a nierówność jest ostra – więc nie może mieć miejsc zerowych, czyli $\Delta < 0$. Razem:

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad \Delta < 0.$$

Wyniki obu przypadków na koniec **sumujemy**, a nie bierzemy ich części wspólnej. Przypadek liniowy i kwadratowy wykluczają się nawzajem – to osobne, rozłączne sytuacje, a pytanie brzmi, dla *których* m warunek zachodzi.

Pozostałe wersje tego samego zadania różnią się jednym znakiem: nierówność ≥ 0 dla każdego x dopuszcza dzióbek na osi, więc $a > 0$ i $\Delta \leq 0$; „funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne” to $a < 0$ i $\Delta < 0$.

Funkcja przyjmuje wartość największą

CZERWIEC 2015 · ZADANIE NR 15

6 PKT

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{m^2 + m - 6}{m - 5}x^2 - (m - 2)x + m - 5$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

Wyznacz całkowite wartości parametru m , dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

Parabola ma wartość największą dokładnie wtedy, gdy jej ramiona są skierowane w dół, czyli gdy $a < 0$ – i to jest cały ten warunek. Przy okazji wyklucza on $a = 0$, więc „funkcja kwadratowa” nie wymaga tu osobnego założenia. Wartość najmniejsza to symetrycznie $a > 0$.

Reszta zadania to już znane rzeczy: „dwa różne miejsca zerowe” daje $\Delta > 0$, „o jednakowych znakach” daje $x_1 \cdot x_2 > 0$, a słowo **całkowite** w poleceniu każe na końcu wybrać z otrzymanego przedziału same liczby całkowite.

2

Ćwiczenia

1 Oblicz wyróżnik każdego z trójmianów i rozstrzygnij, czy trójmian jest kwadratem dwumianu. Jeśli tak, zwiń go.

a) $4x^2 + 4x + 1$

e) $2x^2 + 4x + 3$

b) $x^2 + 5x + 6$

f) $-16x^2 + 8x - 1$

c) $4x^2 + 8x + 3$

g) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

d) $x^2 + 4\sqrt{2}x + 8$

h) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$

2 Nie wymnażając nawiasów, zapisz funkcję w postaci kanonicznej: pierwszą współrzędną wierzchołka odczytaj jako średnią miejsc zerowych, drugą oblicz jako wartość funkcji w tym punkcie.

a) $f(x) = (x + 3)(x - 7)$

c) $f(x) = -3(x + 1)(x - 4)$

b) $f(x) = 2(x - 1)(x + 5)$

d) $f(x) = (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$

3 Zapisz funkcję w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe. Nie przechodź przez postać ogólną: przyrównaj wzór do zera i spierwiastkuj obie strony.

a) $f(x) = (x + 3)^2 - 5$

c) $f(x) = 2(x - 7)^2 + \pi$

b) $f(x) = 3(x - 1)^2 - 12$

d) $f(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 8$

4 Sprawdź za pomocą wzorów Viète'a, czy podane liczby są pierwiastkami równania.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; liczby 3 i 4

d) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$; liczby $\sqrt{3} - 1$ i $\sqrt{3} + 1$

b) $2x^2 - x - 6 = 0$; liczby 2 i $-\frac{3}{2}$

e) $x^2 + x - 6 = 0$; liczby -2 i 3

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$; liczby 2 i 4

5 Wiedząc, że jednym z pierwiastków równania jest podana liczba, wyznacz drugi pierwiastek. Skorzystaj ze wzorów Viète'a.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 2$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$, $x_1 = \sqrt{2} - 1$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$, $x_1 = -2$

d) $x^2 + bx - 12 = 0$, $x_1 = 3$; wyznacz też współczynnik b

6 Dla każdego z poniższych równań, gdzie x jest liczbą rzeczywistą, wyznacz (o ile to możliwe) wartości wyrażeń

$$x_1^2 + x_2^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

w których x_1, x_2 oznaczają pierwiastki równania. Nie wyznaczaj samych pierwiastków.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

d) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

b) $2x^2 + 3x - 4 = 0$

e) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $x^2 - 2x + 3 = 0$

f) $3x^2 + 2x = 0$

7 Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste.

a) $mx^2 + 2x + 1 = 0$

e) $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$

b) $x^2 + mx - 1 = 0$

c) $x^2 + 2mx + 2m^2 = 0$

f) Dla jakich wartości m równanie z punktu a) ma dokładnie jedno rozwiązanie?

d) $x^2 - (m + 1)x + m = 0$

Wyznaczanie parametru m

Dwie serie rozgrzewkowe, doprowadzone do końca: wypisujemy warunki, a potem je **rozwiązujemy**. Pierwsza pilnuje liczby rozwiązań i tego, czy równanie w ogóle jest kwadratowe; druga – znaków rozwiązań.

Wszędzie m jest parametrem rzeczywistym, a x_1, x_2 oznaczają rozwiązania równania z danego podpunktu.

8 Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których zachodzi podany warunek.

- a) Równanie $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste.
- b) Równanie $mx^2 + 4x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste.
- c) Równanie $(m - 3)x^2 - 2x + 1 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- d) Równanie $x^2 + (m - 1)x + 4 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.
- e) Funkcja $f(x) = (m + 2)x^2 + mx + 1$ ma dwa różne miejsca zerowe.
- f) Równanie $x^2 + 2mx + m^2 = 0$ ma rozwiązanie rzeczywiste.
- g) Trójmian $x^2 + mx + m$ jest kwadratem dwumianu.
- h) Funkcja kwadratowa $f(x) = (m - 1)x^2 + 2x + m$ nie ma miejsc zerowych.

9 Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których zachodzi podany warunek. Zwróć uwagę, które warunki dotyczą znaku sumy, a które znaku iloczynu.

- a) Równanie $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne.
- b) Równanie $x^2 + (m + 1)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.
- c) Równanie $x^2 - mx + 2m = 0$ ma dwa różne rozwiązania tego samego znaku.
- d) Równanie $x^2 + mx - m = 0$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.
- e) Równanie $x^2 - (m - 2)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania nieujemne.
- f) Równanie $x^2 + 2mx + m + 6 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, z których dokładnie jedno jest dodatnie.
- g) Jednym z rozwiązań równania $x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$ jest zero, a drugie rozwiązanie jest dodatnie.

Wypisywanie warunków

Tu nie liczymy nic. Odpowiedzią jest **komplet warunków**, które trzeba zapisać, zanim zacznie się rachunki – czyli to, co w rozwiązaniu stoi w kroku pierwszym i drugim. **Nie rozwiązujemy ich.**

10 Każde z równań ma mieć dwa różne rozwiązania x_1, x_2 , spełniające podany warunek. Wypisz wszystkie warunki – razem z tymi, bez których podane wyrażenie w ogóle nie ma sensu.

a) $x^2 - mx + m - 2 = 0, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$

b) $x^2 + 2mx + m + 1 = 0, \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$

c) $x^2 - (m + 1)x + m = 0, \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$

d) $x^2 - 3mx + m + 1 = 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = 2$

e) $x^2 - mx + 2m - 3 = 0, \quad \sqrt{x_1 \cdot x_2} = 3$

f) $x^2 + (m - 4)x + m = 0, \quad \frac{1}{x_1 + x_2} = 2$

g) $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0, \quad \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{2}$

h) $x^2 + mx + m - 1 = 0, \quad |x_1 - x_2| = 3$

11 Warunek dotyczy tu nie wartości wyrażenia, tylko tego, **gdzie na osi** leżą rozwiązania. Przez f oznacz lewą stronę równania i wypisz wszystkie warunki.

a) Równanie $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ ma dwa rozwiązania mniejsze od 1.

b) Równanie $x^2 + mx + 3m = 0$ ma dwa rozwiązania większe od -2 .

c) Liczba 2 leży między rozwiązaniami równania $x^2 + mx - m = 0$.

d) Równanie $x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$ ma dwa rozwiązania w przedziale $(-1, 3)$.

e) Równanie $(m - 1)x^2 + 2x + m = 0$ ma dwa rozwiązania mniejsze od 0. Zapisz warunki na dwa sposoby: przez znaki sumy i iloczynu oraz przez wartość $f(0)$ i położenie wierzchołka.

f) Dokładnie jedno rozwiązanie równania $x^2 - mx + m + 3 = 0$ należy do przedziału $(0, 5)$.

12 W podpunktach a)–d) dane jest równanie

$$(x - 2)(x^2 + mx + m) = 0,$$

a trójmian z drugiego nawiasu oznaczamy przez f . Wypisz warunki.

- a) Równanie ma dokładnie trzy różne rozwiązania.
- b) Równanie ma dokładnie dwa różne rozwiązania.
- c) Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- d) Równanie ma trzy różne rozwiązania dodatnie.
- e) Równanie $(x + 1)(x^2 - 2mx + m) = 0$ ma trzy różne rozwiązania, których iloczyn jest dodatni.

13 Wypisz wszystkie warunki, jakie musi spełniać parametr m .

- a) Nierówność $x^2 + mx + 1 > 0$ jest prawdziwa dla każdego rzeczywistego x .
- b) Nierówność $(m - 1)x^2 + 2x + 1 > 0$ jest prawdziwa dla każdego rzeczywistego x .
- c) Funkcja $f(x) = (m + 1)x^2 + 2x + m$ przyjmuje wartość największą.
- d) Wartość najmniejsza funkcji $f(x) = x^2 + 2mx + m$ wynosi -4 .
- e) Zbiorem wartości funkcji $f(x) = mx^2 + 2x + 1$ jest przedział $[-3, +\infty)$.
- f) Wierzchołek paraboli o równaniu $y = x^2 + mx + m$ leży na osi Ox .
- g) Funkcja $f(x) = x^2 + mx + 3$ jest rosnąca w przedziale $[2, +\infty)$.

Dodatek

Dowody

Trzy wyprowadzenia, których nikt na maturze nie wymaga – ale kto je raz prześledzi, nie musi pamiętać wzorów.

Wzór na pierwiastki: uzupełnianie do kwadratu. Do nawiasu wchodzi połowa współczynnika przy x , a kwadrat tej połowy odejmujemy: $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$. Tak samo w równaniu $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ – dzielimy przez a i uzupełniamy:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}. \end{aligned}$$

Lewa strona jest kwadratem, więc dla $\Delta < 0$ nie ma rozwiązań, a dla $\Delta \geq 0$:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Wzory Viète'a z wzorów na pierwiastki. Dla $\Delta \geq 0$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Wzory Viète'a przy $\Delta = 0$. Pierwiastek jest jeden, podwójny, więc $x_1 = x_2 = x_0$ i wzory dają $2x_0 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_0^2 = \frac{c}{a}$. Obie równości zgadzają się z $x_0 = -\frac{b}{2a}$: druga daje $b^2 = 4ac$, czyli $\Delta = 0$.

14★ We wzorze funkcji $y = ax^2 + bx + c$ ustalamy $a \neq 0$ oraz c i zmieniamy tylko współczynnik b . Wykaż, że wierzchołek paraboli porusza się wtedy po paraboli o równaniu $y = -ax^2 + c$.

Tabela ze wszystkimi wyrażeniami

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

WYRAŻENIE	PRZEZ SUMĘ I ILOCZYN	PRZEZ S, P	PRZEZ A, B, C
$x_1 + x_2$	—	s	$-\frac{b}{a}$
$x_1 \cdot x_2$	—	p	$\frac{c}{a}$
$x_1^2 + x_2^2$	$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$	$s^2 - 2p$	$\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$
$x_1^3 + x_2^3$	$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$	$s^3 - 3ps$	$\frac{3abc - b^3}{a^3}$
$x_1^4 + x_2^4$	$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$	$s^4 - 4s^2p + 2p^2$	$\frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$
$x_1^2 - x_2^2$	$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$	—	—
$x_1^4 - x_2^4$	$(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)$	—	—
$(x_1 - x_2)^2$	$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$	$s^2 - 4p$	$\frac{\Delta}{a^2}$
$ x_1 - x_2 $	$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$	$\sqrt{s^2 - 4p}$	$\frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	$\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$	$\frac{s}{p}$	$-\frac{b}{c}$
$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$	$\frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2}$	$\frac{s^2 - 2p}{p^2}$	$\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$
$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$	$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2}$	$\frac{s^2 - 2p}{p}$	$\frac{b^2 - 2ac}{ac}$

Kreska w dwóch wierszach nie jest przeoczeniem: te wyrażenia zmieniają znak przy zamianie x_1 z x_2 miejscami, a s i p o kolejności pierwiastków nic nie wiedzą – przez nie zapisać się nie da. W zadaniach rozkłada się je na czynniki. Trzy ostatnie wiersze mają w mianowniku c albo ac , więc każdy niesie założenie $c \neq 0$.

Odpowiedzi i krótkie rozwiązania

Numer to numer zadania w tym materiale. Do każdego zadania wynik i szkic rozwiązania: sam klucz, bez pełnych rachunków.

Ćwiczenia

1 ODP. a) $(2x + 1)^2$; b) nie; c) nie; d) $(x + 2\sqrt{2})^2$; e) nie; f) $-(4x - 1)^2$; g) $(x - \frac{1}{2})^2$; h) $(\sqrt{3}x - 1)^2$.

SZKIC Trójmian jest kwadratem dwumianu wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$: ma wówczas jedno, podwójne miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{2a}$ i równa się $a(x - x_0)^2$. Wyróżniki kolejno: 0, 1, 16, 32 – 32 = 0, 16 – 24 = -8, 64 – 64 = 0, 1 – 1 = 0, 12 – 12 = 0.

W f) współczynnik a jest ujemny: $-16x^2 + 8x - 1 = -(16x^2 - 8x + 1) = -(4x - 1)^2$. W b) i c) $\Delta > 0$, więc trójmian rozkłada się na dwa różne czynniki, $(x + 2)(x + 3)$ oraz $(2x + 1)(2x + 3)$, ale kwadratem nie jest.

2 ODP. a) $(x - 2)^2 - 25$; b) $2(x + 2)^2 - 18$; c) $-3(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{75}{4}$; d) $(x - 1)^2 - 5$.

SZKIC p to średnia miejsc zerowych, $q = f(p)$.

a) $p = 2$, $q = 5 \cdot (-5) = -25$. b) $p = -2$, $q = 2 \cdot (-3) \cdot 3 = -18$. c) $p = \frac{3}{2}$, $q = -3 \cdot \frac{5}{2} \cdot (-\frac{5}{2}) = \frac{75}{4}$. d) miejsca zerowe $1 \pm \sqrt{5}$, więc $p = 1$, $q = (-\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = -5$.

3 ODP. a) $(x + 3 - \sqrt{5})(x + 3 + \sqrt{5})$; b) $3(x - 3)(x + 1)$; c) postać iloczynowa nie istnieje; d) $-2(x - \frac{3}{2})(x + \frac{5}{2})$.

SZKIC a) $(x + 3)^2 = 5$, $|x + 3| = \sqrt{5}$, $x = -3 \pm \sqrt{5}$. b) $(x - 1)^2 = 4$, $|x - 1| = 2$, $x = 3$ lub $x = -1$. c) $2(x - 7)^2 + \pi \geq \pi > 0$ dla każdego x , więc funkcja nie ma miejsc

zerowych. d) $(x + \frac{1}{2})^2 = 4$, $x = \frac{3}{2}$ lub $x = -\frac{5}{2}$; współczynnik $a = -2$ zostaje przed nawiasami.

4 ODP. a) tak; b) tak; c) nie; d) tak; e) nie.

SZKIC Sprawdzamy obie równości: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. a) 7 i 12: tak. b) $\frac{1}{2}$ i -3 : tak. c) suma 6 się zgadza, ale iloczyn $8 \neq 5$: nie. d) suma $2\sqrt{3}$, iloczyn $3 - 1 = 2$: tak. e) iloczyn -6 się zgadza, ale suma $1 \neq -1$: nie; pierwiastkami są 2 i -3 .

5 ODP. a) $x_2 = 5$; b) $x_2 = \frac{1}{3}$; c) $x_2 = \sqrt{2} + 1$; d) $x_2 = -4$, $b = 1$.

SZKIC a) $x_2 = 7 - 2 = 5$ (albo $10 : 2$). b) $x_1x_2 = -\frac{2}{3}$, więc $x_2 = \frac{-2/3}{-2} = \frac{1}{3}$. c) $x_1x_2 = 1$, więc $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$; to samo daje suma: $2\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)$. d) $x_1x_2 = -12$ daje $x_2 = -4$, a $b = -(x_1 + x_2) = -(3 - 4) = 1$.

6 ODP. a) 13 oraz $\frac{5}{6}$; b) $\frac{25}{4}$ oraz $\frac{3}{4}$; c) równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc wyrażenia nie mają wartości; d) 7 oraz $\sqrt{5}$; e) 8 oraz 1; f) $\frac{4}{9}$, a drugie wyrażenie nie istnieje, bo jednym z pierwiastków jest 0.

SZKIC Najpierw Δ , potem $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ oraz $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$.

a) $\Delta = 1$; $25 - 12 = 13$; $\frac{5}{6}$. b) $\Delta = 41$; $(-\frac{3}{2})^2 - 2 \cdot (-2) = \frac{25}{4}$; $\frac{-3/2}{-2} = \frac{3}{4}$. c) $\Delta = 4 - 12 < 0$. d) $\Delta = 9$; $5 + 2 = 7$; $\frac{-\sqrt{5}}{-1} = \sqrt{5}$. e) $\Delta = 0$, pierwiastek podwójny $x_1 = x_2 = 2$; $16 - 8 = 8$; $\frac{4}{4} = 1$. f) $\Delta = 4$;

$x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_1 x_2 = 0$; $\frac{4}{9} - 0 = \frac{4}{9}$; zerowy iloczyn oznacza, że jeden z pierwiastków to 0.

7 ODP. a) $m \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$; b) $m \in \mathbb{R}$; c) nie ma takich m ; d) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; e) $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$; f) $m \in \{0, 1\}$.

SZKIC a) Dla $m = 0$ równanie jest liniowe, $2x + 1 = 0$, i ma jedno rozwiązanie, więc $m \neq 0$; dla $m \neq 0$: $\Delta = 4 - 4m > 0 \iff m < 1$. b) $\Delta = m^2 + 4 > 0$ dla każdego m . c) $\Delta = 4m^2 - 8m^2 = -4m^2 \leq 0$, więc dwóch różnych rozwiązań nie ma dla żadnego m (dla $m = 0$ jest jedno, podwójne: $x = 0$). d) $\Delta = (m + 1)^2 - 4m = (m - 1)^2$, dodatnia dla $m \neq 1$; dla $m = 1$ równanie $x^2 - 2x + 1 = 0$ ma jedno rozwiązanie. e) $\Delta = 4m^2 - 4(m + 2) = 4(m - 2)(m + 1) > 0$. f) $m = 0$ (równanie liniowe, $x = -\frac{1}{2}$) albo $m \neq 0$ i $\Delta = 0$, czyli $m = 1$ (wtedy $x = -1$).

8 ODP. a) $m \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. b) $m \in (-2, 0) \cup (0, 2)$. c) $m = 3$ lub $m = 4$. d) $m \in (-3, 5)$. e) $m \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2 - 2\sqrt{3}) \cup (2 + 2\sqrt{3}, +\infty)$. f) każda liczba rzeczywista. g) $m = 0$ lub $m = 4$. h) $m \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

SZKIC Zawsze dwa pytania. Pierwsze: czy przy x^2 stoi parametr? Jeśli tak, dochodzi założenie, że ten współczynnik nie jest zerem – b), e), h). Drugie: ile ma być rozwiązań i czy mają być różne – stąd przy wyróżniku $>$, $=$, $\geq$ albo $<$. W a) $\Delta = 4(m - 3)(m + 2)$. W b) $\Delta = 16 - 4m^2$, a zero wypada w środku przedziału $(-2, 2)$, więc trzeba je wyciąć. W c) „dokładnie jedno rozwiązanie” nie wyklucza $m = 3$: równanie staje się wtedy liniowe, $-2x + 1 = 0$, i ma dokładnie jedno

rozwiązanie; dla $m \neq 3$ zostaje $\Delta = 0$, czyli $m = 4$. W e) $\Delta = m^2 - 4m - 8$ ma pierwiastki $2 \pm 2\sqrt{3}$, a -2 leży wewnątrz lewego przedziału (bo $2 - 2\sqrt{3} \approx -1,46$), więc wykluczenie $m \neq -2$ naprawdę coś zmienia. W f) $\Delta = 4m^2 - 4m^2 = 0$ dla każdego m – trójmian jest pełnym kwadratem $(x + m)^2$ i zawsze ma pierwiastek. W g) $\Delta = m^2 - 4m = m(m - 4)$. W h) słowo „kwadratowa” daje $m \neq 1$, ale jedynka i tak nie wchodzi do odpowiedzi, bo $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62$ i $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$.

9 ODP. a) $m \in (-\infty, -1)$. b) nie ma takich m . c) $m \in (8, +\infty)$. d) $m \in (0, +\infty)$. e) $m \in (4 + 2\sqrt{3}, +\infty)$. f) $m \in (-\infty, -6]$. g) $m = -1$.

SZKIC Znak iloczynu mówi, czy pierwiastki są tego samego znaku; znak sumy dokładnie, którego. Oba ujemne: $p > 0$ i $s < 0$; oba dodatnie: $p > 0$ i $s > 0$; ten sam znak: samo $p > 0$. W a) $\Delta = 4$ jest stała i dodatnia, więc zostaje $2m < 0$ oraz $m^2 - 1 > 0$. W b) $\Delta = (m - 1)^2$, ale $s = -(m + 1) > 0$ daje $m < -1$, a $p = m > 0$ daje $m > 0$ – warunki się wykluczają. Wiadać to też od razu z postaci iloczynowej: $x^2 + (m + 1)x + m = (x + 1)(x + m)$, a -1 dodatnie nie będzie. W d) nie trzeba pisać $\Delta(m) > 0$: z $p < 0$ wynika $\Delta > 0$ samo z siebie. W e) „nieujemne” dopuszcza zero, więc $p \geq 0$; dwa różne pierwiastki nieujemne mają sumę dodatnią, stąd $s > 0$, a $\Delta = m^2 - 8m + 4$ obcina wszystko poniżej $4 + 2\sqrt{3}$. W f) „dokładnie jedno dodatnie” to dwa przypadki: $p < 0$ (różne znaki), czyli $m < -6$, albo $p = 0$ i $s > 0$, co daje $m = -6$

i pierwiastki 0 oraz 12 – dlatego przedział jest domknięty. W g) zero jest pierwiastkiem dokładnie wtedy, gdy wyraz wolny jest zerem: $m^2 - 1 = 0$, a drugi pierwiastek to $-m$, więc dodatni tylko dla $m = -1$.

10 ODP. a) $\Delta(m) > 0$, $x_1 x_2 \neq 0$. b) jak w a). c) jak w a). d) $\Delta(m) > 0$, $x_2 \neq 0$. e) $\Delta(m) > 0$, $x_1 x_2 \geq 0$. f) $\Delta(m) > 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$. g) jak w f). h) $\Delta(m) > 0$ – i nic więcej.

szkic Dodatkowy warunek czytamy z tego, co stoi w mianowniku albo pod pierwiastkiem. Żaden pierwiastek nie może zerować mianownika: w a), b), c) daje to $x_1 x_2 \neq 0$, czyli wyraz wolny różny od zera; w f) i g) w mianowniku stoi suma, więc $x_1 + x_2 \neq 0$. W d) mianownikiem jest samo x_2 , więc wystarczy $x_2 \neq 0$ – drugi pierwiastek może być zerem. W e) pierwiastek kwadratowy wymaga $x_1 x_2 \geq 0$. Podpunkt h) jest po to, żeby było widać, że nie każdy warunek coś dokłada: różnica i moduł są określone zawsze.

11 ODP. a) $\Delta(m) > 0$, $f(1) > 0$, $m < 1$. b) $\Delta(m) > 0$, $f(-2) > 0$, $-\frac{m}{2} > -2$. c) $f(2) < 0$. d) $\Delta(m) > 0$, $f(-1) > 0$, $f(3) > 0$, $-1 < m < 3$. e) $m \neq 1$, $\Delta(m) > 0$ oraz albo $x_1 x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 < 0$, albo $(m-1)f(0) > 0$ i $-\frac{1}{m-1} < 0$. f) $f(0) \cdot f(5) < 0$.

szkic Trzy warunki: $\Delta(m) > 0$ (pierwiastki istnieją), znak $a \cdot f(k)$ (liczba k leży poza przedziałem między pierwiastkami) i położenie wierzchołka $-\frac{b}{2a}$ względem k (po której stronie). Gdy k ma leżeć **między** pierwiastkami, zostaje jeden warunek, $a \cdot f(k) < 0$, bo $\Delta(m) > 0$ wynika z niego samo – stąd krót-

kie c). Przy przedziale obustronnym warunki powtarzają się na obu końcach, a wierzchołek ma leżeć między nimi (d). W a), b), d) współczynnik $a = 1$, więc $a \cdot f(k) > 0$ upraszcza się do $f(k) > 0$. Podpunkt e) pokazuje, że przy żądaniu „oba mniejsze od zera” oba języki dają to samo. W f) wartości na końcach przedziału mają mieć różne znaki; osobno trzeba obejrzeć $f(0) = 0$ i $f(5) = 0$, bo wtedy pierwiastek wypada dokładnie w końcu przedziału.

12 ODP. a) $\Delta(m) > 0$ oraz $f(2) \neq 0$. b) $\Delta(m) = 0$ i $f(2) \neq 0$, albo $\Delta(m) > 0$ i $f(2) = 0$. c) $\Delta(m) < 0$, albo $\Delta(m) = 0$ i $f(2) = 0$. d) $\Delta(m) > 0$, $f(2) \neq 0$, $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$. e) $\Delta(m) > 0$, $f(-1) \neq 0$, $x_1 x_2 < 0$.

szkic Jedno rozwiązanie dostajemy za darmo z czynnika liniowego: $x = 2$, a w e) $x = -1$. Trójmian ma dołożyć tyle, żeby razem wyszła liczba z treści; to, czy wolno mu trafić w tę samą liczbę, sprawdzamy podstawieniem $f(2)$. W d) liczba 2 jest dodatnia sama z siebie, więc warunek na znaki dotyczy tylko pierwiastków trójmianu. W e) iloczyn wszystkich trzech rozwiązań to $(-1) \cdot x_1 x_2$, więc ma być $x_1 x_2 < 0$.

13 ODP. a) $\Delta(m) < 0$. b) $m > 1$ oraz $\Delta(m) < 0$. c) $m + 1 < 0$. d) $-\frac{\Delta(m)}{4} = -4$. e) $m > 0$ oraz $-\frac{\Delta(m)}{4m} = -3$. f) $\Delta(m) = 0$. g) $-\frac{m}{2} \leq 2$.

szkic W a) i b) nierówność ostra dla każdego x znaczy, że parabola leży cała nad osią: ramiona do góry i brak miejsc zerowych. W b) trzeba osobno obejrzeć $m = 1$ – zostaje $2x + 1 > 0$, co nie jest prawdą dla każdego

x (choćby dla $x = -1$), więc ten przypadek odpada. W c) wartość największa istnieje dokładnie wtedy, gdy ramiona idą w dół. W d) i e) korzystamy z drugiej współrzędnej wierzchołka $q = -\frac{\Delta}{4a}$; w e) dochodzi $a > 0$, bo zbiór wartości jest ograniczony z dołu. W f) wierzchołek na osi Ox znaczy $q = 0$, czyli $\Delta(m) = 0$. W g) funkcja rośnie na prawo od wierzchołka, więc wierzchołek nie może leżeć na prawo od 2.

Dodatek

14 zadanie na dowód

SZKIC Wierzchołek ma współrzędne $p = -\frac{b}{2a}$ oraz $q = f(p) = c - \frac{b^2}{4a}$. Z pierwszej równości $b = -2ap$, więc $q = c - \frac{4a^2p^2}{4a} = c - ap^2$. Współrzędne (p, q) każdego wierzchołka spełniają więc równanie $y = -ax^2 + c$, a każdy punkt tej paraboli jest wierzchołkiem dla $b = -2ap$.