

ANALIZA

PLAN

EGZEKUCJA

KONTROLA

JAK ROZWIĄZYWAĆ ZADANIA MATEMATYCZNE?

Kurs do matury rozszerzonej z matematyki

00





Dzień dobry!

Nazywam się **Tomasz Saweczko**, w internecie jestem znany jako „**Łysy uczy matmy**”. Uczę matematyki od ponad 20 lat, a studiowałem ją na Uniwersytecie Jagiellońskim, Uniwersytecie Warszawskim i Uniwersytecie im. Fryderyka II w Neapolu.



DARMOWY KURS DO MATURY ROZSZERZONEJ

Filmy, materiały do pobrania i zadania do samodzielnej pracy – całość prowadzę na YouTube, a komplet zebrany jest tutaj:

lisyuczymatmy.pl/yt-matura-rozszerzona-kurs



YouTube



TikTok



Instagram



lisyuczymatmy.pl

Powodzenia na maturze – i do zobaczenia na kanale!

Spis treści

Metoda APEK	4
Przykłady	5
Czerwiec 2022, zadanie 4 – pole trójkąta ostrokątnego	5
Maj 2018, zadanie 8 – podzielność przez 6	6
Czerwiec 2021, zadanie 12 – równanie stopnia trzeciego z parametrem	7
Maj 2021, zadanie 8 – stosunek pól w trójkącie równobocznym	9
Maj 2024, zadanie 8 – zależność między bokami trójkąta	11
Czerwiec 2023, zadanie 9 – trójkąt wpisany w okrąg	13
Maj 2026, zadanie 1 – granica ciągu z symbolem Newtona	15

METODA APEK

Cztery etapy pracy nad zadaniem. Nazwa jest robocza, sama metoda ma sto lat i opisał ją George Pólya w książce *Jak to rozwiązać*. Do każdego etapu dochodzi sokratejski dodatek: zamiast czekać na olśnienie, zadajemy sobie pytania. Co by mi wystarczyło wiedzieć? Z czym mi się to kojarzy? Jak mógłbym do tego dojść?

A ANALIZA

Rozczytujemy treść, szukamy skojarzeń i próbujemy zrozumieć, o co naprawdę pytają. Robimy rysunek, wprowadzamy oznaczenia, spisujemy dane i tezę w skondensowanej postaci, tak żeby do treści nie trzeba było wracać. Już tu zaczyna rysować się droga do rozwiązania.

P PLAN

Wynika z analizy: wiemy, jak się w zadaniu poruszać, które przypadki rozpatrzeć i w jakiej kolejności. Zanim cokolwiek policzymy, spisujemy warunki, które muszą być spełnione. Majster przed robotą też najpierw ogląda, a dopiero potem bierze narzędzia.

E EGZEKUCJA

Część techniczna: rachunki i przekształcenia. Najbardziej mozolna, więc wybieramy najprostszą drogę w duchu Hilberta: „dobry matematyk to leniwy matematyk”. Trzymamy postać iloczynową, pozbywamy się ułamków, nie wyliczamy niczego, zanim nie jest potrzebne. Im mniej rachunków, tym mniej miejsc na pomyłkę.

K KONTROLA

Wynik wstawiamy z powrotem do treści i sprawdzamy, czy spełnia wszystkie jej warunki. Kontrola może pojawić się na każdym etapie, także w środku rachunków, zwykle małym kosztem. Pierwsze zadanie w tym zestawie pokazuje, co się dzieje, gdy tego kroku zabraknie.

PRZYKŁADY

CZERWIEC 2022 · ZADANIE NR 4

W FILMIE 10:19

Pole trójkąta ostrokątnego o bokach 5 i 8 jest równe 12. Długość trzeciego boku tego trójkąta jest równa

A. 5

B. 8

C. $\sqrt{41}$

D. $\sqrt{143}$

A Czytamy treść i od razu podkreślamy słowo, które łatwo przeoczyć: trójkąt ma być **ostrokątny**. Dane są dwa boki, 5 i 8, oraz pole 12. Pytają o trzeci bok, a ten daje twierdzenie cosinusów, o ile znamy kąt między bokami. Kąt siedzi we wzorze na pole $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

P Ze wzoru na pole $\sin \alpha$, z ostrokątności znak $\cos \alpha$, potem twierdzenie cosinusów.

E Oznaczmy przez α kąt między bokami 5 i 8.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin \alpha &= 12 \\ \sin \alpha &= \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Trójkąt ma być ostrokątny, więc $\cos \alpha > 0$ i z jedynek trygonometrycznej $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Trzeci bok c z twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned}c^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{4}{5} = 89 - 64 = 25 \\ c &= 5.\end{aligned}$$

Według klucza CKE poprawna jest odpowiedź **A**.

K Skontrolujmy, czy otrzymany trójkąt spełnia warunki zadania. Ma boki 5, 5 i 8. Największy kąt leży naprzeciw największego boku, więc sprawdzamy kąt γ naprzeciw boku 8:

$$\begin{aligned}8^2 &= 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos \gamma \\ 14 &= -50 \cos \gamma \\ \cos \gamma &= -\frac{7}{25} < 0.\end{aligned}$$

Ujemny cosinus to kąt rozwarty. Trójkąt 5, 5, 8 jest więc **rozwartokątny**, a nie ostrokątny (drugi znak, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, daje od razu rozwarty kąt α). Trójkąta ostrokątnego o bokach 5 i 8 i polu 12 po prostu **nie ma**.

Zadanie jest sprzeczne: taki trójkąt nie istnieje, więc żadna odpowiedź nie jest poprawna, a sprostowania nie było. Morał: wynik zawsze wstawiamy z powrotem do treści.

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba

$$k^3m - km^3$$

jest podzielna przez 6.

- A** Mamy wykazać, że liczba dzieli się przez 6. Kiedy coś dzieli się przez 6? Wtedy, gdy dzieli się przez 2 i przez 3. Zadanie rozpada się więc na dwa mniejsze. Druga myśl: jak w ogóle stwierdza się podzielność? Spójrzcie na liczbę 10013. Przez co się dzieli? Trudno powiedzieć. Ale gdy zapiszemy $10013 = 17 \cdot 19 \cdot 31$, odpowiedź widać natychmiast. Do podzielności potrzebna jest **postać iloczynowa**.
- P** Rozłożyć wyrażenie na czynniki, a potem osobno sprawdzić podzielność iloczynu przez 2 i przez 3.
- E** Rozkład nie wymaga żadnej sztuki: wyłączamy km przed nawias, a w nawiasie zostaje różnica kwadratów.

$$k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k - m)(k + m).$$

Podzielność przez 2. Jeżeli któraś z liczb k , m jest parzysta, to iloczyn jest parzysty i koniec. Jeżeli obie są nieparzyste, to ich suma $k + m$ jest parzysta. W każdym przypadku jeden z czynników dzieli się przez 2.

Podzielność przez 3. Jeżeli któraś z liczb k , m dzieli się przez 3, to iloczyn też i koniec. W przeciwnym razie każda z nich daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 albo 2. Reszty **różne**: $k = 3k_1 + 1$, $m = 3m_1 + 2$ (albo odwrotnie), wtedy $k + m = 3(k_1 + m_1 + 1)$ dzieli się przez 3. Reszty **takie same**: $k = 3k_1 + r$, $m = 3m_1 + r$, wtedy $k - m = 3(k_1 - m_1)$ dzieli się przez 3. W każdym przypadku jeden z czynników dzieli się przez 3. Liczba jest więc podzielna przez 2 i przez 3, czyli przez 6.

- K** Zamiast kontroli rachunków (nie było ich) sprawdzimy, czy nie zgubiliśmy przypadku. Przy dzieleniu przez 2 reszty to 0 lub 1, przy dzieleniu przez 3 to 0, 1 lub 2. Przeszliśmy po wszystkich kombinacjach, więc dowód jest kompletny. Szybki test na liczbach: $k = 2$, $m = 1$ daje $8 - 2 = 6$, a $k = 5$, $m = 2$ daje $250 - 40 = 210 = 6 \cdot 35$.

Jak to zapisać na maturze? Kilкома zdaniami zwykłego tekstu: „Jeśli k lub m jest parzyste, iloczyn jest parzysty; jeśli obie są nieparzyste, parzysta jest suma $k + m$. Jeśli k lub m dzieli się przez 3, iloczyn też; jeśli nie, to przy różnych resztach przez 3 dzieli się $k + m$, a przy takich samych $k - m$.” To jasny sygnał, że autor wie, co pisze.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(x - 3)(x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m) = 0$$

ma dokładnie dwa rozwiązania.

- A** Równanie ma postać iloczynową, a iloczyn jest zerem, gdy zeruje się któryś z czynników. Pierwszy czynnik daje rozwiązanie za darmo: $x_1 = 3$, niezależnie od m . Drugi czynnik to trójmian, nazwijmy go

$$f(x) = x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m,$$

bo będziemy o nim dużo mówić. Wszystkie pozostałe rozwiązania równania to pierwiastki f . Skoro razem mają być **dokładnie dwa**, trójmian ma dołożyć **dokładnie jedno nowe**.

- P** Kiedy trójmian dokłada dokładnie jedno nowe rozwiązanie? Spiszmy możliwości w tabelce:

pierwiastki f	co musi zajść	warunek
dwa różne, jeden z nich to 3	3 się powtarza, drugi jest nowy	$\Delta > 0$ i $f(3) = 0$
jeden podwójny, różny od 3	jedyny pierwiastek f jest nowy	$\Delta = 0$ i $f(3) \neq 0$

Przypadki się wykluczają, więc odpowiedzią będzie **suma** zbiorów. Tabelka to gotowy plan: liczymy Δ (będzie wyrażeniem kwadratowym w m), potem $f(3)$ (też wyrażenie w m) i rozwiązujemy dwa krótkie układy. Wygodne oznaczenie f zwraca się właśnie teraz: warunek „3 jest pierwiastkiem” to po prostu $f(3) = 0$.

E Wyróżnik trójmianu f :

$$\begin{aligned}\Delta &= (m-1)^2 - 4(-6m^2 + 2m) \\ &= m^2 - 2m + 1 + 24m^2 - 8m \\ &= 25m^2 - 10m + 1 = (5m-1)^2.\end{aligned}$$

Pełny kwadrat, więc $\Delta \geq 0$ dla każdego m , a $\Delta = 0$ tylko dla $m = \frac{1}{5}$.

Przypadek $\Delta = 0$, czyli $m = \frac{1}{5}$. Podwójny pierwiastek to $x = -\frac{m-1}{2} = \frac{2}{5} \neq 3$, więc warunek $f(3) \neq 0$ jest spełniony. Równanie ma rozwiązania 3 i $\frac{2}{5}$.

Przypadek $\Delta > 0$ i $f(3) = 0$.

$$\begin{aligned}f(3) &= 9 + 3(m-1) - 6m^2 + 2m = 0 \\ -6m^2 + 5m + 6 &= 0 \\ 6m^2 - 5m - 6 &= 0 \\ \Delta_m &= 25 + 144 = 169, \quad m = \frac{5 \pm 13}{12},\end{aligned}$$

czyli $m = \frac{3}{2}$ lub $m = -\frac{2}{3}$. Obie wartości są różne od $\frac{1}{5}$, więc dla nich $\Delta > 0$ i trójmian ma dwa różne pierwiastki, z których jeden to 3.

Odpowiedź: $m \in \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\}$.

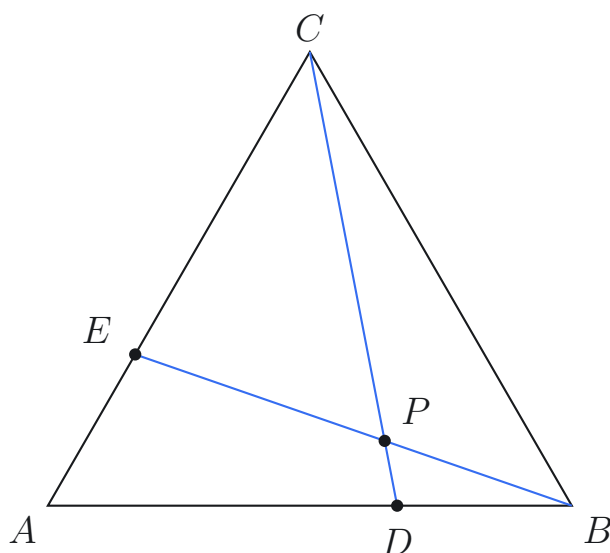
K Wstawmy jedną z wartości z powrotem do równania. Dla $m = \frac{3}{2}$: $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{27}{2} + 3 = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{21}{2}$, czyli $2f(x) = 2x^2 + x - 21 = (x-3)(2x+7)$. Równanie ma rozwiązania 3 i $-\frac{7}{2}$: dokładnie dwa, zgadza się.

Gdyby treść żądała **dokładnie trzech** rozwiązań, tabelka miałaby jeden wiersz: $\Delta > 0$ i $f(3) \neq 0$. Gdyby żądała **jednego**, zostałyby przypadki $\Delta < 0$ oraz „ $\Delta = 0$ i $f(3) = 0$ ”. Dlatego przed rachunkami warto spisać przypadki: liczenie jest to samo, zmienia się tylko, które wiersze bierzemy.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Na bokach AB i AC wybrano punkty – odpowiednio D i E takie, że

$$|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|.$$

(zobacz rysunek). Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P .



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

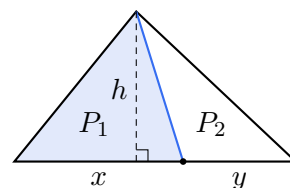
- A** Najpierw przepisujemy dane na rysunek, żeby nie wracać do treści. Z $|BD| = \frac{1}{3}|AB|$ mamy $|BD| = x$ i $|AD| = 2x$; z $|AE| = \frac{1}{3}|AC|$ mamy $|AE| = x$ i $|EC| = 2x$. Trójkąt jest równoboczny, więc znamy kąty, ale zobaczymy, że nie będą potrzebne. Mały trójkąt DBP to ten, o który pytają. Odcinki dzielą boki w zadanym stosunku, a to powinno się kojarzyć z jednym prostym faktem.

Stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości

Jeżeli odcinek poprowadzony z wierzchołka trójkąta dzieli przeciwległy bok na części x i y , to dzieli trójkąt na dwa trójkąty o polach w stosunku

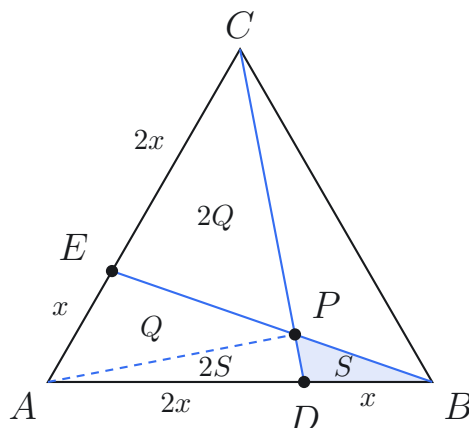
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2} x h}{\frac{1}{2} y h} = \frac{x}{y},$$

bo oba mają tę samą wysokość h . Stąd na przykład środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.



P Dorysować **jeden** odcinek, AP , oznaczyć pola małych trójkątów przez niewiadome i z twierdzenia o stosunku pól ułożyć równania. Bez twierdzenia sinusów, cosinusów i bez trójkątów podobnych.

E Niech S oznacza pole trójkąta DBP , a T pole całego trójkąta ABC .



W trójkącie ABP odcinek PD dzieli bok AB w stosunku $2 : 1$, więc pole trójkąta ADP to $2S$. W trójkącie APC odcinek PE dzieli bok AC w stosunku $1 : 2$; jeśli pole trójkąta APE oznaczmy przez Q , to pole trójkąta PCE wynosi $2Q$.

Teraz patrzymy na większe trójkąty. Trójkąt ABE ma podstawę $|AE| = \frac{1}{3}|AC|$, więc jego pole to $\frac{1}{3}T$; składa się z kawałków Q , $2S$ i S . Trójkąt ADC ma podstawę $|AD| = \frac{2}{3}|AB|$, więc jego pole to $\frac{2}{3}T$; składa się z Q , $2Q$ i $2S$.

$$Q + 3S = \frac{1}{3}T$$

$$3Q + 2S = \frac{2}{3}T.$$

Interesuje nas S , więc pozbywamy się Q : pierwsze równanie mnożymy przez -3 i dodajemy do drugiego.

$$-3Q - 9S + 3Q + 2S = -T + \frac{2}{3}T$$

$$-7S = -\frac{1}{3}T$$

$$S = \frac{1}{21}T.$$

Pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

K Wstawmy wynik do drugiego równania: z pierwszego $Q = \frac{1}{3}T - \frac{3}{21}T = \frac{4}{21}T$, a wtedy $3Q + 2S = \frac{12}{21}T + \frac{2}{21}T = \frac{14}{21}T = \frac{2}{3}T$. Zgadza się.

Nigdzie nie użyliśmy tego, że trójkąt jest równoboczny: liczą się tylko stosunki, w jakich CD i BE dzielą boki. Ten sam dowód działa dla dowolnego trójkąta.

Dany jest trójkąt ABC , który nie jest równoramienny. W tym trójkącie miara kąta ABC jest dwa razy większa od miary kąta BAC .

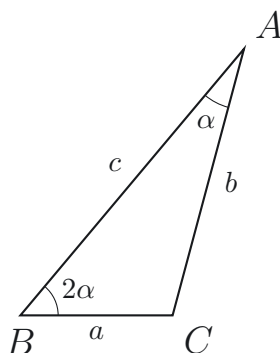
Wykaż, że długości boków tego trójkąta spełniają warunek

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|.$$

- A** Zapis $|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$ niewiele mówi. Przyjmujemy standardowe oznaczenia: $a = |BC|$ naprzeciw A , $b = |AC|$ naprzeciw B , $c = |AB|$ naprzeciw C . Kąt BAC nazwijmy α , wtedy kąt ABC to 2α . Teza w nowych oznaczeniach:

$$b^2 = a^2 + ac.$$

Rysunek nie musi być w skali, ma tylko porządkować dane. Od tej chwili treści nie czytamy: wszystko jest na rysunku i w tej jednej równości.



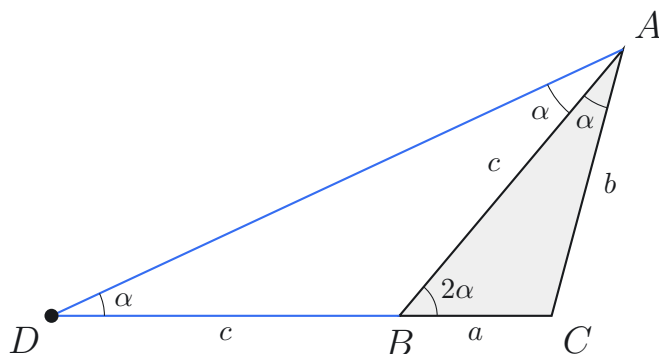
Można walić twierdzeniem cosinusów (dwa razy), potem sinusów i jeszcze tożsamością trygonometryczną. Da się, ale to męczarnia. Spójrzmy na równość inaczej: nie ma w niej pierwiastków ani niczego dziwnego, same iloczyny. Takie równości biorą się z **proporcji**:

$$b^2 = a(a + c) \iff b \cdot b = a \cdot (a + c) \iff \frac{b}{a} = \frac{a + c}{b}.$$

Proporcja boków to **trójkąty podobne**. Tu kończy się analiza: wiemy, że szukamy dwóch podobnych trójkątów, w których pojawi się bok długości $a + c$.

- P** Na razie mamy jeden trójkąt i żadnego boku $a + c$. Trzeba go wykombinować: przedłużyć bok a o c (albo c o a). Przedłużenie a o c jest obiecujące: powstanie trójkąt o dwóch bokach długości c , czyli równoramienny, a z równoramiennym coś się z kątami ogarnie. Potem szukamy pary trójkątów podobnych i spisujemy proporcję.

E Przedłużamy bok CB poza B do punktu D tak, że $|BD| = c$.



Trójkąt ABD jest równoramienny ($|AB| = |BD| = c$). Kąt ABD jest przyległy do kąta $ABC = 2\alpha$, więc ma miarę $180^\circ - 2\alpha$, a na dwa kąty przy podstawie zostaje 2α , czyli po α na każdy:

$$\angle BAD = \angle BDA = \alpha.$$

Porównajmy teraz trójkąty ABC i DAC .

- ABC : kąt α przy A , kąt 2α przy B , wspólny kąt przy C .
- DAC : kąt α przy D , kąt $\alpha + \alpha = 2\alpha$ przy A , ten sam kąt przy C .

Trójkąty są podobne (cecha kąt–kąt). Bierzemy stosunki boków leżących naprzeciw kątów α i 2α : w ABC to a i b , w DAC to b i $|DC| = a + c$.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+c}$$

$$b^2 = a(a+c) = a^2 + ac.$$

To jest dokładnie teza: $|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$.

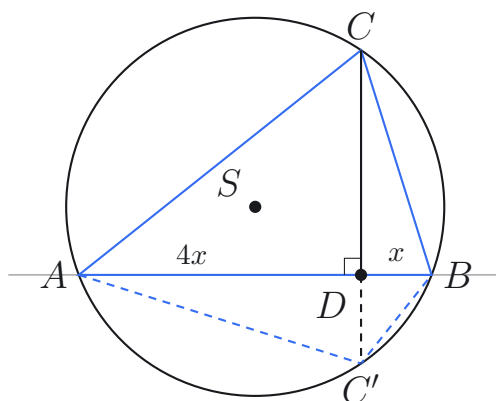
K Sprawdźmy równość na konkretnym trójkącie z kątami $\alpha = 30^\circ$ i $2\alpha = 60^\circ$, czyli połówce trójkąta równobocznego: $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$. Lewa strona $b^2 = 3$, prawa $a(a+c) = 1 \cdot 3 = 3$. Zgadza się.

Nie wiedzieliśmy z góry, co dorysować. Wskazała to **teza**: przepisana jako proporcja zażądała boku $a + c$, a przedłużenie o c dało trójkąt równoramienny, czyli coś, co umiemy policzyć. Kolejność jest ważna: najpierw myślimy, co ma wyjść, dopiero potem rysujemy.

W okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ wpisano trójkąt ABC . Bok AB tego trójkąta jest zawarty w prostej o równaniu $4x - 3y + 2 = 0$. Wysokość CD tego trójkąta dzieli bok AB tak, że $|AD| = 4 \cdot |DB|$.

Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

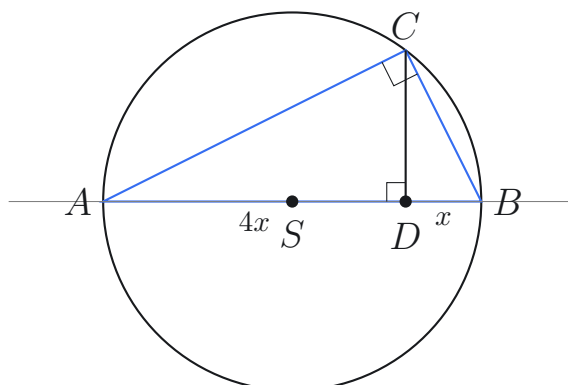
- A** W geometrii analitycznej rzadko potrzebny jest układ współrzędnych; wystarczy szkic. Okrąg ma środek $S = (1, 2)$ i promień $r = 5$. Na pewnej prostej leży bok AB , gdzieś na okręgu leży C , a spodek wysokości D dzieli AB tak, że $|AD| = 4x$, $|DB| = x$. Rysujemy to, co mówi treść, bez żadnych dodatkowych założeń:



I tu robi się niewygodnie. Punkt C może leżeć po jednej albo po drugiej stronie prostej AB . Punkt C' z rysunku też spełnia treść: jego wysokość dzieli AB w tym samym stosunku, a trójkąt ABC' ma **inne pole**. Zapowiadają się więc **dwa przypadki** i dużo roboty. Ale w treści nikt nie napisał „rozpatrz wszystkie przypadki”. Na maturze takie polecenie jest praktycznie zawsze, gdy przypadki są; to niby polecenie, a naprawdę odpowiedź. Skoro go nie ma, może przypadek jest tylko jeden. A jeden przypadek dostaniemy, gdy prosta AB przechodzi przez środek okręgu: wtedy AB jest średnicą, oba położenia C dają przystające trójkąty o tym samym polu, a kąt ACB jest prosty, bo opiera się na średnicy.

- P** Sprawdzić, czy S leży na prostej $4x - 3y + 2 = 0$. Jeżeli tak, rysunek wygląda inaczej i jest prościej: $|AB| = 2r$, trójkąt jest prostokątny, a wysokość z wierzchołka kąta prostego liczymy z $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$. Pole z $\frac{1}{2}|AB| \cdot |CD|$.

- E** Podstawiamy $S = (1, 2)$: $4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$. Środek leży na prostej, więc AB jest średnicą i $|AB| = 10$. Rysunek robi się taki:



$$\begin{aligned} 4x + x &= 10, & x &= 2, & |AD| &= 8, & |DB| &= 2 \\ |CD|^2 &= |AD| \cdot |DB| = 16, & |CD| &= 4 \\ P &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20. \end{aligned}$$

- K** Trójkąt ma być prostokątny, więc sprawdźmy Pitagorasa. Z tych samych zależności w trójkącie prostokątnym $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB| = 80$ oraz $|BC|^2 = |DB| \cdot |AB| = 20$, a $80 + 20 = 100 = |AB|^2$. Zgadza się. Można też zapamiętać: gdy trójkąt jest wpisany w okrąg o danym równaniu, zawsze warto najpierw sprawdzić, czy prosta z treści przechodzi przez środek.

Bez tej obserwacji trzeba wyznaczyć A i B z układu równań, potem D z wektora $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$, potem prostą prostopadłą, potem C z kolejnego układu. Tak wygląda drugi sposób w kluczu CKE. Wynik ten sam, $P = 20$, ale rachunków kilka razy więcej i kilka razy więcej miejsc na pomyłkę.

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}.$$

Zapisz obliczenia.

- A** Mamy policzyć granicę ilorazu. Mianownik to zwykły wielomian stopnia trzeciego. Przekładza licznik: symbol Newtona $\binom{n+2}{n-1}$ nie wygląda jak coś, co się porównuje z n^3 . Gdyby licznik też był wielomianem, granica byłaby rutyną.
- P** Rozpisać symbol Newtona z definicji i doprowadzić do wielomianu. Dalej standardowo: dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n .
- E** Z definicji $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Gdy wzór ogólny przeraża, weźmy **konkretną liczbę**, np. $n = 10$:

$$\left| \binom{12}{9} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{3! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{3!} \right|.$$

Po skróceniu $9!$ z $12!$ zostają trzy czynniki: od największego, 12, w dół. Różnica $12 - 9 = 3$ i 3 w mianowniku to ta sama trójka. Ogólnie jest identycznie, bo $(n+2) - (n-1) = 3$:

$$\left| \binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} \right|.$$

Licznik jest wielomianem stopnia trzeciego o współczynniku $\frac{1}{6}$ przy n^3 . Dzielimy licznik i mianownik przez n^3 :

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+2)(n+1)n}{6}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \right|.$$

Odpowiedź: granica jest równa $\frac{1}{3}$.

- K** Sprawdźmy wzór na licznik dla $n = 10$: $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$, a $\binom{12}{9} = \binom{12}{3} = 220$. Zgadza się.

Wszystkie operacje wykonane na $n = 10$ są dokładnie tymi, które trzeba wykonać ogólnie. Konkretny przykład nie zastępuje rozwiązania, ale pozwala zobaczyć, co się skraca, zanim napiszemy to z literami.